

А.М. Корнеев, С.А. Кудряков

(Ленинградский институт авиационного приборостроения)

ОЦЕНИВАНИЕ ЧАСТОТЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ НИЗКОГО ПОРЯДКА

В научном приборостроении, радиолокации, гидроакустике, медицине, сейсмологии и в целом ряде других областей науки и техники часто возникает вопрос оценивания частоты гармонического сигнала, наблюдаемого на фоне широкополосной помехи. К настоящему времени разработан целый ряд методов решения этой задачи, ориентированных на применение ЭВМ и дающих в большинстве случаев вполне приемлемые результаты. Основные трудности при реализации этих методов связаны с задачей слежения за изменяющейся частотой наблюдаемого сигнала в реальном масштабе времени, что накладывает достаточно жесткие требования к алгоритмам оценивания с точки зрения вычислительной сложности и требуемого объема памяти при их практической реализации.

Традиционный подход к задаче оценивания частоты гармонического сигнала, как к частному случаю спектрального оценивания базируется на использовании различных модификаций быстрого преобразования Фурье (БПФ). Однако в ряде практических применений вычисление всего спектра является чрезмерным и нерациональным. Поэтому с практической точки зрения интерес представляют более простые алгоритмы (по сравнению с БПФ), позволяющие с достаточной точностью оценить частоту гармонического сигнала. Понятно, что построение более простых алгоритмов возможно лишь при больших априорных данных. Поэтому при рассмотрении таких алгоритмов будем полагать априорно известным, что наблюдаемый сигнал содержит единственный гармонический сигнал и широкополосную аддитивную помеху. При несоответствии реальной ситуации такому предположению некоторые из рассматриваемых алгоритмов будут требовать модификации, а другие будут приводить к неверным результатам.

Итак, рассмотрим процесс, описываемый моделью

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (1)$$

$$x(t) = y(t) + n(t), \quad (2)$$

где $y(t)$ — гармонический сигнал частоты ω ; A — амплитуда сигнала; φ — начальная фаза сигнала; $x(t)$ — наблюдения процесса $y(t)$; $n(t)$ — белый шум с нулевым средним и дисперсией σ_n^2 .

Для лучшего представления используемых в дальнейшем подходов к оцениванию частоты рассмотрим вначале более подробно уравнение (1) для случая дискретных наблюдений. Если дискретизация во времени производится с интервалом T_0 то уравнение (1) примет вид

$$y(T_0 k) = A \sin(\omega T_0 k + \varphi), \quad (3)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$.

Правую часть уравнения (3) можно записать иначе:

$$\begin{aligned} A \sin(\omega T_0 k + \varphi) &= A \sin[\omega T_0(k-1) + \omega T_0 + \varphi] = \\ &= A \cos \omega T_0 \sin[\omega T_0(k-1) + \varphi] + \\ &+ A \sin \omega T_0 \cos[\omega T_0(k-1) + \varphi]. \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогично справедливо выражение

$$\begin{aligned} A \sin[\omega T_0(k-2) + \varphi] &= \\ &= A \cos \omega T_0 \sin[\omega T_0(k-1) + \varphi] - \\ &- A \sin \omega T_0 \cos[\omega T_0(k-1) + \varphi]. \end{aligned} \quad (5)$$

Из уравнений (4) и (5) следует, что

$$\begin{aligned} A \sin(\omega T_0 k + \varphi) &= 2A \cos \omega T_0 \sin[\omega T_0(k-1) + \varphi] - \\ &- A \sin[\omega T_0(k-2) + \varphi] \end{aligned}$$

или, с учетом выражения (1),

$$y(k) = 2 \cos \omega T_0 y(k-1) - y(k-2), \quad (6)$$

где k — дискретные отсчеты времени; T_0 — интервал дискретизации (рассматривается лишь случай, когда T_0 удовлетворяет условиям теоремы Котельникова).

Таким образом, для случая отсутствия шумов в наблюдениях, т.е.

$$x(t) = y(t)$$

для определения частоты гармонического сигнала достаточно иметь три последовательных отсчета процесса. Тогда искомая частота легко найдется по выражению

$$\omega = \frac{1}{T_0} \arccos \frac{y(k) + y(k-2)}{2y(k-1)}, \quad (7)$$

где $y(k-1) \neq 0$.

Единственная сложность в нахождении значения частоты по выражению (7) состоит в необходимости располагать априорной информацией о возможном диапазоне изменения ω для корректного выбора интервала T_0 дискретизации исходного сигнала.

Естественно, что для практического применения выражение (7) не совсем удобно, так как в реальной практике всегда присутствуют погрешности измерений и вычислений. Поэтому оценка частоты, получаемая по выражению (7), требует некоторого усреднения по набору всех имеющихся отсчетов исследуемого процесса.

Используя метод наименьших квадратов, применительно к уравнению (6), нетрудно получить

$$\hat{\omega} = \frac{1}{T_0} \arccos \frac{\sum_{k=2}^M y(k-1)[y(k) + y(k-2)]}{\sum_{k=2}^M y^2(k-1)}, \quad (8)$$

где $\hat{\omega}$ — оценка частоты; M — число дискретных отсчетов наблюдаемого процесса.

При этом оценка частоты сигнала (8) минимизирует функцию стоимости вида

$$I = \sum_{k=2}^M [y(k) - 2 \cos \omega T_0 y(k-1) + y(k-2)]^2.$$

Отметим также, что оценивание частоты ω по формуле (8) эквивалентно параметрической идентификации цифрового фильтра предсказания вида

$$e(k) = (1 - 2az^{-1} + z^{-2})y(k), \quad (9)$$

где $a = \cos \omega T_0$; $e(k)$ — ошибка одношагового предсказания.

Структурная схема фильтра, соответствующего уравнению (9), реализованного в виде трансверсального фильтра, приведена на рис. 1, а и в решетчатой форме на рис. 1, б.

Следует обратить внимание на то, что второй весовой коэффициент трансверсального фильтра и коэффициент отражения второго каскада решетчатого фильтра априорно приняты равными 1 (что полностью соответствует выражениям (6) и (9)). Такой подход сокращает число оцениваемых параметров фильтра

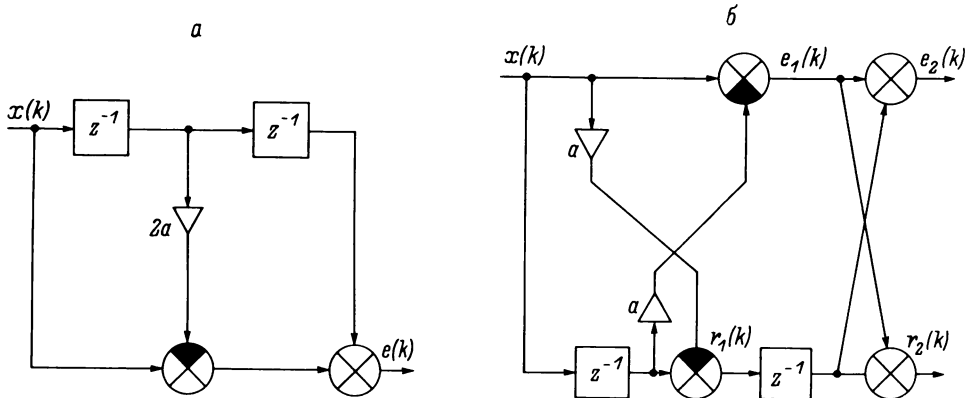


Рис. 1. Структурная схема АР-фильтра 2-го порядка: а — реализация на линии задержки с отводами; б — решетчатый вариант

и позволяет оценивать первый коэффициент отражения, минимизируя функцию стоимости

$$I = \sum_{k=0}^M (e_2^2(k) + r_2^2(k)) \quad (10)$$

вместо стандартной функции стоимости

$$I = \sum_{k=0}^M (e_1^2(k) + r_1^2(k)), \quad (11)$$

где $e_1(k)$, $e_2(k)$ — ошибки прямого предсказания на один и два шага; $r_1(k)$, $r_2(k)$ — ошибки обратного предсказания на один и два шага.

Замена функции потерь (11) на (10) приводит (что вполне естественно) к уже полученному нами результату (8).

В случае отсутствия шумов измерений и вычислений выражение (8) дает несмещенную оценку частоты сигнала ω , причем независимо от амплитуды сигнала A , начальной фазы ϕ и длины последовательности наблюдений M (разумеется, $M \geq 3$).

Если же уровень шума $n(t)$, на фоне которого наблюдается сигнал, значителен, то оценка, получаемая по уравнению (8), будет смещенной, а именно [1]:

$$\hat{a} = \cos \omega T_0,$$

где σ_n^2 — дисперсия шума $n(t)$.

Для устранения смещения, возникающего в оценке частоты, используются различные методы [2]. К числу относительно просто реализуемых на практике, вероятно, следует отнести использование полной модели АРСС (авторегрессии скользящего среднего), применение фильтров предсказания более высокого порядка и применение нормированного варианта фильтра.

Основание применения перечисленных подходов достаточно очевидно. В случае присутствия шумов (2) для наблюдаемого сигнала $x(k)$ легко записать

$$\begin{aligned} x(k) = & 2ax(k-1) - x(k-2) + \\ & + n(k) - 2an(k-1) + n(k-2), \end{aligned} \quad (12)$$

где $a = \cos \omega T_0$.

Таким образом, в присутствии шумов наблюдаемый процесс описывается моделью авторегрессии скользящего среднего порядка (2.2) со специальным видом симметрии: оператор авторегрессии совпадает с оператором скользящего среднего.

Общеизвестно, что оценивание параметров АРСС процесса приводит к необходимости решения нелинейных уравнений, что для практического применения, естественно, более затруднительно, нежели решение линейных уравнений, получаемых при оценивании параметров авторегрессивной (АР)-модели. Однако в случае оценивания частоты единственного синусоидального сигнала, наблюдаемого на фоне широкополосной помехи (12), нет необходимости оценивать все параметры АРСС процесса. Для этой цели достаточно оценить параметр a , для которого из уравнения (12) легко получить

$$R(3) = 2aR(2) - R(1), \quad (13)$$

где $R(i)$ — значение автокорреляционной функции наблюдаемого процесса для задержки i .

При этом

$$R(i) = \sigma_n^2 \delta(i) + \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 i, \quad (14)$$

где $i = 0, 1, 2, \dots$; $\delta(i)$ — функция Кронекера.

Из выражения (13) находим

$$a = \frac{R(3) + R(1)}{2R(2)}. \quad (15)$$

При сравнении выражений (13) и (14) видно, что параметры шума $n(k)$ не влияют на оценку a , получаемую по уравнению (15). В этом состоит коренное отличие получаемой таким путем оценки от оценки по выражению (8), в котором в знаменателе используется величина, пропорциональная $R(0)$, зависящая не только от параметров синусоидального сигнала, но и от дисперсии шума (14) для $i = 0$.

Таким образом, для несмещенной оценки частоты синусоидального сигнала в соответствии с уравнением (15) может быть использовано выражение

$$\hat{\omega} = \frac{1}{T_0} \arccos \frac{\sum_{k=3}^M y(k-3)[y(k) + y(k-2)]}{\sum_{k=3}^M y(k-3)y(k-1)}, \quad (16)$$

где M — число отсчетов наблюдаемого сигнала.

Выражению (15) легко придать рекуррентную форму для оценивания изменяющейся частоты, используя для $R(i)$ оценки вида

$$R_k(i) = (1 - \alpha)R_{k-1}(i) + \alpha y(k)y(k-i), \quad (17)$$

где $0 < \alpha < 1$ — экспоненциальный коэффициент забывания.

Нормирование на число измерений в выражении (17) не проводится, так как подобное нормирование должно проводиться как для числителя, так и для знаменателя выражения (15), что эквивалентно их домножению на одно и то же число.

Использование в выражении (16) оценок выборочных значений (вместо истинных значений) автокорреляционной функции, безусловно, ухудшают оценку $\hat{\omega}$, но при таком способе вычисления оценки часто результаты получаются несравненно лучше, чем при реализации уравнения (8). При этом наилучшие результаты оценивания получаются при $\omega_0 \approx 4\omega$.

Другой подход к получению несмещенной оценки частоты состоит в использовании нормированного варианта АР-фильтра второго порядка. Для выяснения свойств такого нормирования представим выражение (12) в виде:

$$x(k) = 2ax(k-1) - x(k-2) + \xi(k),$$

где $\xi(k) = n(k) - 2an(k-1) + n(k-2)$ — процесс скользящего среднего.

При этом очевидно, что

$$\sigma_{\xi}^2 = (2 + 4a^2)\sigma n^2,$$

и следовательно, выбор коэффициента нормирования для выходного сигнала фильтра в виде $1/\sqrt{2 + 4a^2}$ и вычисление коэффициентов отражения, минимизирующих нормированную ошибку, обеспечит несмещенность интересующей нас оценки.

Структурная схема фильтра с учетом нормировки приведена на рис. 2. Понятно, что такая структура фильтра более пригодна для построения рекурсивной процедуры оценивания. Основная трудность при этом подходе состоит в необходимости точного знания величины a для вычисления коэффициента нормировки, в то время, как само значение a должно определяться на основе нормированных значений ошибки. В работе [1]

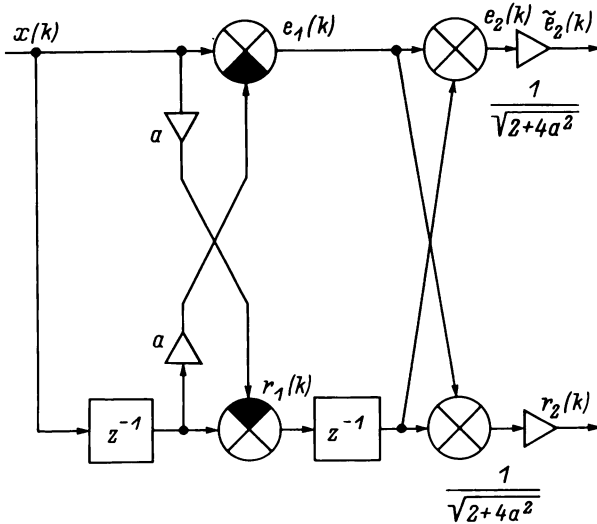


Рис. 2. Нормированный вариант решетчатого фильтра

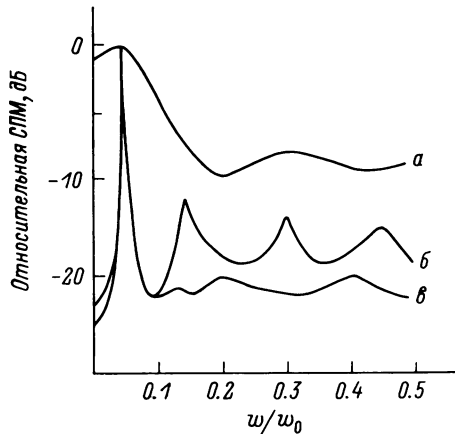


Рис. 3. Результаты оценивания спектральной плотности мощности синусоидального сигнала, наблюдаемого на фоне белого шума

показано, что при рекуррентном оценивании частоты эта проблема на практике не вызывает сколько-нибудь серьезных затруднений, и продемонстрирована высокая эффективность применения нормированного фильтра для оценивания не только постоянной, но и изменяющейся во времени частоты.

Третий подход, как уже отмечалось, состоит в замене АРСС модели (12) авторегрессионной моделью более высокого порядка.

Теоретическим обоснованием такой замены служит следствие из теоремы декомпозиции Вольда утверждающее, что АРСС процесс с любой наперед заданной точностью может быть заменен АР-процессом более высокого (а возможно и бесконечного) порядка. Естественно, что за упрощение (возникающее из-за замены одной модели другой) процедуры идентификации приходится платить. В данном случае такой платой оказывается усложнение вычисления оценки частоты. Так, если к наблюдаемому ряду была подогнана АР-модель порядка p , т.е.

$$x(k) = -a_1 x(k-1) - a_2 x(k-2) - \dots - a_p x(k-p) + n(k),$$

то частота синусоидального сигнала определяется как точка, соответствующая максимуму спектральной плотности мощности сигнала, вычисляемой по выражению

$$S_x(\omega) = \frac{2\sigma_n^2}{\left|1 + \sum_{k=1}^p a_k \exp(-j\omega k)\right|^2}, \quad (18)$$

где S_x — спектральная плотность мощности сигнала $x(k)$; ω — частота; σ_n^2 — дисперсия возбуждающего шума.

Таким образом, в случае оценки частоты синусоидального сигнала с помощью АР-модели необходимо оценить параметры модели a_k , $k = 1, 2, \dots, p$, и дисперсию шума σ_n^2 , затем вычислить согласно выражению (18) $S_x(\omega)$ и определить частоту ω , соответствующую максимуму найденной спектральной плотности мощности.

Оценивание частоты гармонического сигнала на основе описанного подхода дает высокоточные результаты, но по сравнению с ранее описанными методами требует больших вычислительных затрат. Частично сократить эти затраты удастся путем построения АР-фильтра малого порядка с дополнительной задержкой сигнала на входе [3], т.е.

$$A(z) = z^{-\Delta} A_p(z),$$

где $A_p(z)$ — передаточная функция обращенного авторегрессионного фильтра малого порядка; Δ — величина дополнительной задержки.

Для иллюстрации эффекта введения дополнительной задержки на рис. 3 приведены оценки СПМ одного и того же сигнала ($\omega = 2\pi \cdot 0.05$, $M = 200$, отношение сигнал-шум 0 дБ), полученные с помощью трех АР-фильтров: а) $p = 5$, $\Delta = 0$; б) $p = 5$, $\Delta = 8$; в) $p = 13$, $\Delta = 0$.

При построении рекуррентных процедур по оцениванию параметров фильтра с дополнительной задержкой следует иметь в

Результаты сравнительного моделирования
 $\omega = 0.25$; $M = 200$

Отношение сигнал/шум, дБ	Оценка частоты для различных моделей			
	ненормированная AP(2)	нормированная AP(2)	APCC(2.2)	AP(8)
+20	0.2502	0.2501	0.2499	0.2501
+10	0.2451	0.2498	0.2491	0.2495
-0	0.2106	0.2469	0.2452	0.2478
-5	0.1774	0.2426	0.2414	0.2408

виду, что реализацию оценивания необходимо проводить в форме решетчатого фильтра, так как трансверсальная структура (из-за наличия нулевых весовых коэффициентов) приведет к очень медленной сходимости.

В таблице приведены результаты моделирования, позволяющие сравнить рассмотренные подходы к оцениванию. Выбор конкретного подхода для его практической реализации, очевидно, должен решаться, исходя из особенностей конкретной задачи и требований к точности оценки и допустимой сложности применяемого алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hu Y., Ling Y.-C.* Constrained lattice structures for harmonic retrieval. IEEE Conf. Acoust., Speech and Signal Process. — 1984. — P. 6.2.1-6.2.4.

2. *Кей С., Марил С.* Современные методы спектрального анализа. Обзор ТИИЭР. — 1981. — Т. 69, № 11. С. 5-51.

3. *Reddy V., Egardt Bo., Kailath T.* Optimized lattice-form adaptive line enhancer for a sinusoidal signal in broad-band noise. IEEE Trans. On Acoust., Speech and Signal Process. V. ASSP-29. 1981. — N 3. — P. 702-709.

Рукопись поступила 19.10.90