УДК 681.5

Анализ процессов в системах с модуляцией при помощи кронекеровских матричных структур. Сахарук Т.А., Джаманбаев А.А., Ушаков А.В.//Научное приборостроение. Физика аналитических приборов. Л.: Наука, 1989. - С. 71-77.

Показывается, что использование векторных билинейных форм позволяет сконструировать стационарные модели систем с модуляцией, динамически эквивалентные исходным системам. Приведены примеры. Лит. - 6 назв., ил. - 2.

Т.А.Сахарук (НТО АН СССР), А.А.Джаманбаев, А.В.Ушаков (ЛИТМО)

АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ С МОДУЛЯЦИЕЙ ПРИ ПОМОЩИ КРОНЕКЕРОВСКИХ МАТРИЧНЫХ СТРУКТУР

Базовые концепции

В последнее время в теории автоматического управления сложилось положение, характеризующееся тем, что основные теоретические разработки проведены для стационарных систем без модуляции, например, работы [1, 2]. Но практика автоматического управления такова, что реальные системы, использующие электромеханические исполнительные устройства, содержат в своем составе тракты с модуляцией. Противоречие между теорией и практикой управления в указанном смысле лишь частично разрешается имеющимися работами, результаты в которых получены в терминах передаточных функций и дают довольно громоздкие аналитические конструкции, затрудняющие их практическое использование в задачах анализа и синтеза [3].

Алгебраизация теории автоматического управления дала значительные результаты применительно к стационарным линейным системам без модуляции [2]. Предметом настоящей статьи является распространение алгебраических методов на непрерывные системы с модуляцией. Основные результаты получены путем использования кронекеровских матричных структур для описания систем с модуляцией [5]. Другой используемой в статье базовой концепцией является следующее положение: все информационные сигналы, а также сигналы, используемые для организации процессов модуляции-демодуляции, считаются конечномерными, а потому моделируются выходами автономных конечномерных систем минимальной размерности.

Фактически процесс модуляции (демодуляции) заключается в умножении каждой координаты вектора информационного сигнала на соответствующий сигнал-носитель. Это преобразование является билинейным отображением, которое при помощи кронекеровских произведений может быть представлено в виде линейного и причем единственным образом [5] .

Пусть заданы две автономные конечномерные системы:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t), \qquad y(t) = \mathbf{C}x(t), \qquad x(0) = x_0;$$

$$\dot{z}(t) = \Gamma z(t), \qquad g(t) = \mathbf{H}z(t), \qquad z(0) = z_0$$

со скалярными выходами $y(t)$ и $g(t)$, тогда билинейная функция

$$f(t) = y(t)\cdot g(t)$$

описывается эквивалентным линейным отображением [6] :

$$(x \dot{\otimes} z) = Si(\mathbf{A},\Gamma)(x\otimes z), \qquad f(t) = (\mathbf{C}\otimes\mathbf{H})(x\otimes z), \qquad x(0)\otimes z(0) = x_0\otimes z_0,$$

где I – единичные матрицы соответствующих размерностей, $Si(\mathbf{A},\Gamma) = \mathbf{A}\otimes\mathbf{I} + \mathbf{I}\otimes\Gamma^{T}$ – отображение Сильвестра, $\otimes$ – символ кронекеровского произведения векторов и матриц, $x \dot{\otimes} z \triangleq \frac{d}{dt}(x\otimes z)$ – производная кронекеровского произведения векторов.

Постановка задачи

Рассматривается непрерывная система (объект) с векторно-матричным описанием

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}f(t);\ x(0);\ y = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{E}f(t);\ x\in\mathbb{R}^{n_2},\ y\in\mathbb{R}^{m_2}, \tag{1}$$

$$f(t) = \mathbf{S}(g_{м}(t)\otimes v(t)),\quad v\in\mathbb{R}^{m_1},\quad f\in\mathbb{R}^{\ell_2},\ g_{м}\in\mathbb{R}^{r_2}, \tag{2}$$

где f – модулированное внешнее воздействие; $g_{м}$ – модулируемый сигнал (сигнал-носитель); v – модулирующий (информационный) сигнал; S – матрица размерности $\ell_2\times(m_1\cdot r_2)$.

Полагаем, что модулируемый сигнал представляет собой выход автономной конечномерной системы

$$\dot{z}_{м} = \Gamma_{м}z_{м},\ z_{м}(0),\ g_{м}(t) = \mathbf{H}_{м}z_{м}(t);\quad z_{м}\in\mathbb{R}^{r_1}; \tag{3}$$

а информационный сигнал $v(t)$ формируется некоторой линейной непрерывной системой (фильтром)

$$\dot{\chi}(t) = \mathbf{P}\chi(t) + \mathbf{D}w(t);\ \chi(0),\quad v(t) = \mathbf{L}\chi(t) + \mathbf{T}w(t),\ \chi\in\mathbb{R}^{n_1},\ w\in\mathbb{R}^{\ell_1}. \tag{4}$$

Выходной сигнал $y(t)$ системы управления (1) подвергается демодуляции так, что выход демодулятора формируется в соответствии с правилом

$$\eta(t) = \mathbf{S}(g_{д}(t)\otimes y(t)),\quad g_{д}\in\mathbb{R}^{r_2},\ \eta\in R^{\ell_3}, \tag{5}$$

где $g_{д}$ – демодулирующий сигнал, генерируемый на выходе автономной конечномерной системы, модально согласованной с системой (3).

$$\dot{z}_{д} = \Gamma_{д}z_{д},\ z_{д}(0),\quad g_{д}(t) = \mathbf{H}_{д}z_{д}(t);\quad z_{д}\in\mathbb{R}^{r_1}. \tag{6}$$

Выходной сигнал демодулятора содержит кроме информационной составляющей составляющую удвоенной частоты, которая обычно устраняется линейным низкочастотным фильтром

$$\dot{\varphi}(t)=\Phi\varphi(t)+F\eta(t),\ \varphi(0),\ \varphi\in\mathbb{R}^{n_3}$$
$$\Theta(t)=G\varphi(t)+N\eta(t),\quad \Theta\in\mathbb{R}^{m_3}. \tag{7}$$

Процесс модуляции и демодуляции делает исходную динамическую систему (1) системой с переменными параметрами, характер изменения которых определяется конкретной реализацией сигнала-носителя при модуляции (3) и демодулирующего сигнала (6). Исследование систем с переменными параметрами представляет известные трудности [4]. Для разрешения последних введем в рассмотрение избыточное (расширенное) векторное представление процессов в системе (1), построенное на векторных билинейных формах. В результате относительно векторных билинейных форм описание процессов модуляции-демодуляции в системе (1) становится стационарным,при этом нестационарное описание процессов малой исходной размерности введением векторных билинейных форм "обменивается" на стационарное описание высокой размерности.

Основные результаты

Модель процессов модуляции-демодуляции в системе (1), использующая билинейные векторные формы, конструируется на основе формализма кронекеровских матричных структур [5, 6]. Применение формализма кронекеровских матричных структур к соотношениям (2)-(4), описывающих формирование модулированного сигнала, и к соотношениям (1), (5)-(7), описывающих формирование демодулированного сигнала, позволяет сконструировать стационарное описание этих процессов относительно векторных билинейных форм

$$(\dot{\overline{\chi_м\otimes\chi}})=(\Gamma_м\otimes I+I_м\otimes P)(\chi_м\otimes\chi)(I_м\otimes D)(\chi_м\otimes\omega), \tag{8}$$
$$f(t)=S\left[(H_м\otimes L)(\chi_м\otimes\chi)+(H_м\otimes T)(\chi_м\otimes\omega)\right], \tag{9}$$
$$(\dot{\overline{\chi_д\otimes x}})=(\Gamma_д\otimes I+I_д\otimes A)(\chi_д\otimes x)(I_д\otimes B)(\chi_д\otimes f), \tag{10}$$
$$\eta(t)=\left[(H_д\otimes C)(\chi_д\otimes x)+(H_д\otimes E)(\chi_д\otimes f)\right]. \tag{11}$$

Уравнения (8), (9) описывают с помощью билинейных векторных форм процессы модуляции, (10), (11) - процессы демодуляции.

Составим единое векторно-матричное описание процессов модуляции, прохождения модулированного сигнала через систему (1) и демодуляции выходного сигнала системы (1) с использованием векторных билинейных форм и кронекеровских матричных структур. Тогда подстановка (9) в (10) и (11) позволяет записать

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}(\chi_д\otimes\chi_м\otimes\chi)\\(\chi_д\otimes x)\\ \varphi\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c|c}\Gamma_д\otimes I+I_д\otimes(\Gamma_м\otimes I+I_м\otimes P) & 0 & 0\\ I_д\otimes[BS(H_м\otimes L)] & \Gamma_д\otimes I+I_д\otimes A & 0\\ F(H_д\otimes[ES(H_м\otimes L)]) & F[H_д\otimes C] & \Phi\end{array}\right]\begin{bmatrix}(\chi_д\otimes\chi_м\otimes\chi)\\(\chi_д\otimes x)\\ \varphi\end{bmatrix}+$$
$$+\begin{bmatrix}I_д\otimes I_м\otimes D\\ I_д\otimes[BS(H_м\otimes T)]\\ F(I_д\otimes[BS(H_м\otimes T)]\end{bmatrix}(\chi_д\otimes\chi_м\otimes\omega); \tag{12}$$

$$\Theta=\left[\begin{array}{c|c|c}N(H_д\otimes[ES(H_м\otimes L)]) & N(H_д\otimes C) & G\end{array}\right]\begin{bmatrix}(\chi_д\otimes\chi_м\otimes\chi)\\(\chi_д\otimes x)\\ \varphi\end{bmatrix}+$$
$$+\left[N(H_д\otimes[ES(H_м\otimes T)])\right](\chi_д\otimes\chi_м\otimes\omega). \tag{13}$$

Нетрудно видеть, что уравнения (12), (13) линейны относительно билинейных форм ($z_д \otimes z_м \otimes x$), ($z_д \otimes x$), ($z_д \otimes z_м \otimes \omega$). Модели (12)-(13) и (1)-(7) динамически эквивалентны, т.е. адекватно описывают процессы формирования модулированного сигнала, прохождение его через систему (1), демодуляцию сигнала на выходе этой системы и фильтрацию.

Уравнения (12), (13) обладают модельной универсальностью, так как отбрасывание соответствующих членов позволяет строить модельные представления ситуаций: системы (1) без модуляции, без демодуляции, без модуляции-демодуляции, а также при внешнем конечномерном воздействии для всех перечисленных выше случаев. Продемонстрируем отмеченную модельную универсальность уравнений (12), (13) на некоторых частных случаях, представляющих практический интерес.

Система без демодуляции и фильтра

В этом случае в уравнениях (12), (13) следует отбросить члены $z_д \otimes$, $H_д \otimes$, $\Gamma_д \otimes$, $I_д \otimes$, в результате чего получим:

$$\begin{bmatrix} (z_м \dot{\otimes} x) \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \Gamma_м \otimes I + I_м \otimes P & 0 \\ BS(H_м \otimes T) & A \end{array}\right] \begin{bmatrix} (z_м \otimes x) \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_м \otimes D \\ BS(H_м \otimes T) \end{bmatrix} (z_м \otimes \omega);$$

$$\eta = \left[\begin{array}{c|c} ES(H_м \otimes L) & C \end{array}\right] \begin{bmatrix} z_м \otimes x \\ x \end{bmatrix} + \left[ES(H_м \otimes T) \right] (z_м \otimes \omega).$$

Система с демодуляцией-модуляцией (12), (13) при внешнем конечномерном воздействии

Внешнее конечномерное воздействие моделируется выходом автономной реализации системы (4). В этом случае в уравнениях (12), (13) следует положить: $\omega=0$, $T=0$, $D=0$.

$$\begin{bmatrix} (z_д \otimes \dot{z}_м \otimes x) \\ (z_д \dot{\otimes} x) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \Gamma_д \otimes I + I_д \otimes (\Gamma_м \otimes I + I_м \otimes P) & 0 \\ I_д \otimes [BS(H_м \otimes L)] & \Gamma_д \otimes I + I_д \otimes A \end{array}\right] \begin{bmatrix} (z_д \otimes z_м \otimes x) \\ (z_д \otimes x) \end{bmatrix},$$

$$\eta = \left[\begin{array}{c|c} H_д \otimes [ES(H_м \otimes L)] & H_д \otimes C \end{array}\right] \begin{bmatrix} (z_д \otimes z_м \otimes x) \\ (z_д \otimes x) \end{bmatrix}.$$

Пример системы с модуляцией

Рассмотрим объект управления (1), заданный матрицами

$$A = \begin{bmatrix} -0{,}1 & 5{,}0 \\ -5{,}0 & 0{,}0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad E = [0],$$

с нулевыми начальными условиями, при одномерном входном воздействии $v(t)$ (матрица $S=[1]$). Модуляция и демодуляция осуществляется синусоидальными сигналами, генерируемыми системами (3) и (6),

$$\Gamma_м = \Gamma_д = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}; \qquad H_м = H_д = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

с начальными условиями

$$z_м(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T; \qquad z_д(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T;$$

удвоенная частота устраняется фильтром (7) с матрицами

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad N = [0].$$

Система с модуляцией-демодуляцией (это может быть система управления электромеханическим приводом, растровый фазочастотный датчик скорости перемещения оптического изображения и т.п.) рис.1 описывается системой уравнений

$$
\begin{aligned}
&f(t) = g_м(t)\,v(t),\\
&\dot{x}(t) = Ax(t) + Bf(t),\ \ x(0) = x_0,\\
&y = Cx(t),\\
&\eta(t) = g_д(t)\,y(t),\\
&\dot{\varphi}(t) = \Phi\varphi(t) + F\eta(t),\ \ \varphi(0) = \varphi_0,\\
&\Theta(t) = G\varphi(t),\\
&\dot{z}(t) = \Gamma z(t),\ \ z(0) = z_0,\\
&g(t) = Hz(t);\\
&z = z_м = z_д .
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

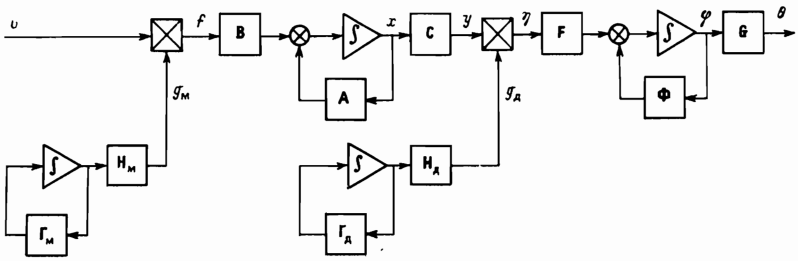

Рис.1. Структурная схема системы с модуляцией

Громоздкая система уравнений полностью описывает отображение $v(t)$ в $\Theta(t)$, однако ее применение для целей анализа и синтеза крайне затруднительно. Используя уравнения (12), (13), легко построить эквивалентную линейную модель

$$
\begin{aligned}
&q(t) = A_п\, q(t) + B_п\, v_п(t),\ \ q(0) = q_0;\\
&\Theta(t) = C_п\, q(t),
\end{aligned}
\qquad (15)
$$

где

$$
A_п = \left[\begin{array}{c|c|c} \Gamma_д \otimes I + I_д \otimes \Gamma_м & 0 & 0\\ I_д \otimes BH_м & \Gamma_д \otimes I + I_д \otimes A & 0\\ 0 & F[H_д \otimes C] & \Phi \end{array}\right],\quad B_п = \begin{bmatrix} 0\\ I_д \otimes BH_м\\ F(I_д \otimes BH_м)\end{bmatrix},\quad q = \begin{bmatrix} z_д \otimes z_м\\ z_д \otimes x\\ \varphi \end{bmatrix}
$$

$$
C_п = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & G\end{array}\right],\qquad v_п(t) = z_д \otimes z_м \otimes v(t).
$$

Анализ и синтез управлений для системы (15) не вызывает никаких затруднений и выполняется известными методами, применяемыми в теории линейных стационарных систем управления.

На рис.2 приведены результаты моделирования реакции рассматриваемой

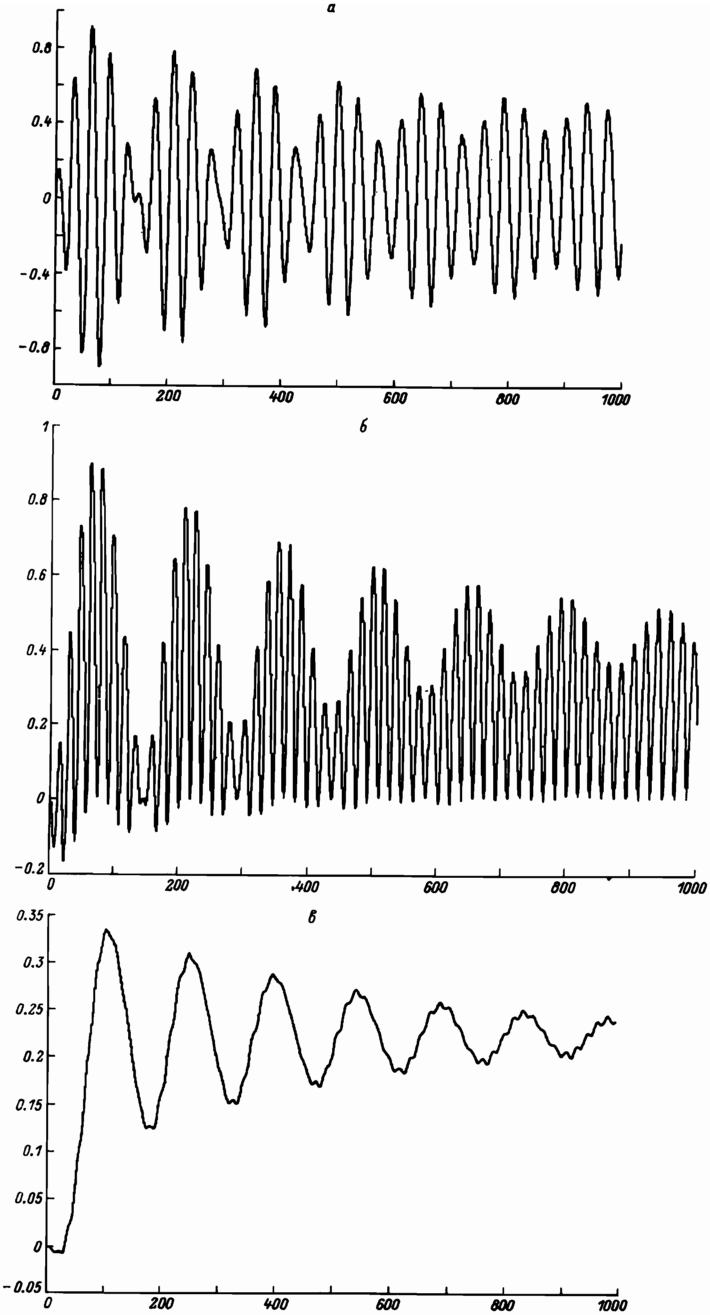

Рис.2. Результаты моделирования реакции системы с модуляцией на единичный скачок на информационном входе $\nu(t)$: а –сигнал $y(t)$ на выходе объекта (1); б – сигнал $\eta(t)$ после демодуляции; в – сигнал $\Theta(t)$ после демодуляции и фильтрации

системы на единичный скачок на информационном входе $v(t)$. Моделирование проводилось на ЭВМ согласно уравнению (15). Приведенные результаты подтверждают динамическую эквивалентность построенной линейной стационарной модели и исходных систем (14).

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. – М.: Наука, 1976.

2. Параев Ю.И. Алгебраические методы в теории линейных систем управления. – Томск: Изд.Томского ун-та, 1980.

3. Куракин К.И., Куракин Л.К. Анализ систем автоматического регулирования на несущей переменного тока. – М.: Машиностроение, 1978.

4. Д'Анжело Г. Линейные системы с переменными параметрами. Анализ и синтез/ Под ред.Н.Т.Кузовкова. – М.: Машиностроение, 1974.

5. Greub W. Multilinear Algebra. 2nd ed. – New York. Springler Verlag, 1979.

6. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969.