УДК 512.642

Моделирование и тестирование равномерных случайных векторов. Бердников А.С., Туртиа С.Б.//Научное приборостроение. Автоматизация научных исследований. Л.: Наука, 1988, с.55

Затронута проблема получения многомерных независимых случайных векторов и тестирование свойств последовательностей таких векторов. Расоматриваются различные классы датчиков случайных чисел, моделирующих независимые, равномерно распределенные случайные последовательности. Лит. - 10 назв.

А.С.Бердников, С.Б.Туртиа (НТО АН СССР)

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ТЕСТИРОВАНИЕ РАВНОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

Для решения многих задач научного приборостроения применяются методы численной оптимизации различных критериев качества. В частности, при разработке масс-спектрометров и других ионно-оптических систем (ИОС) в числе критериев оптимизации могут быть названы [1] : разрешающая способность, чувствительность, дисперсия анализатора по массе, диапазон масс, угол наклона и кривизна линии фокусов, конструктивные параметры и т.д. Функции качества ИОС, характеризующие движение пучка заряженных частиц в электрическом и магнитном полях имеют нелинейный, сильно осциллирующий, аналитически недифференцируемый вид. Размерность пространства варьируемых параметров в таких задачах, как правило, довольно велика, а конструктивные ограничения вынуждают осуществлять поиск решения в области сложной геометрической формы. Все это приводит к тому, что применение классических детерминированных методов оптимизации становится неэффективным, и единственной гарантией нахождения приемлемого решения является использование методов, основанных на случайном поиске [2] .

В основе любого метода случайного поиска лежит датчик случайных чисел (ДСЧ), генерирующий последовательность независимых случайных чисел, равномерно распределенных на промежутке (0,I). От качества датчика в существенной мере зависит качество работы алгоритма случайного поиска, а значит и качество найденных решений.

Цель данной работы - исследование некоторых, наиболее распространенных алгоритмов генерации случайных чисел и выработка рекомендаций по их применению при решении задач математического моделирования и оптимизации схем научных приборов с большим числом свободных параметров.

Постановка задачи

Сердцевиной любого алгоритма случайного поиска, как уже было сказано, является датчик случайных чисел. В силу того, что аппаратные методы генерации случайных чисел (типа сигнала "белый шум") не позволяют воспроизвести ход вычислений, широкого применения достигли детерминированные математические методы генерации псевдослучайных чисел. К числу наиболее обоснованных в теоретическом плане относятся ДСЧ линейно-рекурентного типа

$$x_{k+1} = A \cdot x_k + C \qquad (mod\ m),$$

где константы А и С выбираются так, чтобы обеспечить максимальный период и хорошие корреляционные свойства генерируемой последовательности. Однако доказано [3], что последовательности, моделируемые в R^n с помощью таких датчиков, обладают общим недостатком: любая выборка из n случайных чисел образует вектор, принадлежащий одной из фиксированных k-мерных гиперплоскостей ($k<n$). В случае малых n этот эффект не играет большой роли, однако, с ростом размерности пространства решений приводит к тому, что в последнем появляются целые подпространства, которые алгоритм оптимизации не затрагивает, каким бы способом не осуществлялась последующая адаптация случайного поиска.

Одним из выходов из этого тупика является применение ЛП$_\tau$-поиска [4] , гарантирующего равномерное заполнение произвольного n-мерного гиперкуба. Однако данный алгоритм характеризуется более сложной программной реализацией, к тому же с ростом n резко возрастает объем требуемой оперативной памяти для хранения используемых алгоритмом констант. Кроме того, алгоритм оказывается "слишком регулярным", то есть короткие отрезки последовательности ЛП$_\tau$-чисел характеризуются "малой случайностью".

Кроме упомянутых на практике применяется множество полуэмпирических и эмпирических алгоритмов, проверка работоспособности которых, как правило, исчерпывается тестированием равномерности генерируемой последовательности и ее локальнокорреляционных свойств. Однако не вызывает сомнений тот факт, что во многих случаях основным критерием качества многомерной случайной последовательности является равномерность заполнения n-мерного гиперкуба. С другой стороны, существует широкий круг задач научного приборостроения, когда важным оказывается именно локальная некоррелированность используемой случайной последовательности.

Исходя из вышеизложенного, авторы поставили перед собой задачу разработать комплекс программ датчиков случайных чисел, с одной стороны включающий небольшое число датчиков, с другой — позволяющий охватить возможно большее число типов задач, встречающихся при оптимизации математических моделей научных приборов.

Краткие характеристики использованных ДСЧ

В данной работе отражены результаты исследования не всех известных авторам датчиков, а лишь лучших в своих классах. Так, например, отсутствует датчик RANDU (стандартный датчик фирмы IBM, включенный во многие пакеты ЕС ЭВМ), для которого три последовательных случайных числа оказываются связанными линейной зависимостью [5] . Очень высокую корреляцию показывают известные датчики Фибоначчи, Ротенберга и др.

Исследованные датчики можно разделить на две группы: генерирующие случайные вектора путем многократного обращения к какому-либо одномерному ДСЧ; специально предназначенные для генерации случайных векторов.

К первой группе относятся ДСЧ, условно названные БРЕНТ, ДИТРА, ФОРСА, МАРСА, ко второй — датчики ДИТРБ, ФОРСБ, ЛПТА, ЛПТС.

БРЕНТ — аддитивный датчик. Р.Брентом [6] предложено в известной рекурентной формуле

$$x_{k+1} = x_k + x_{k-i} \quad (mod\ m)$$

использовать $i = 127$. Поскольку $x^{127}+1$ является примитивным многочленом для алгебры Галуа с показателем 2^{127}, то ожидаемый период датчика должен быть не меньше $2^{127}-1$.

ДИТРА — мультипликативный датчик максимального периода, линейный рекурентный датчик без свободного члена:

$$x_{k+1} = A \cdot x_k \quad (mod\ m).$$

Константа А выбирается в соответствии с рекомендациями из работы [7] .

ФОРСА — линейный конгруентный датчик максимального периода со свободным членом:

$$x_{k+1} = A \cdot x_k + C \quad (mod\ m).$$

Константы датчика выбраны согласно работе [5] .

МАРСА — датчик Маклорена и Марсальи [3, 8] , основанный на комбинации двух ДСЧ. В качестве генерирующего используется датчик ФОРСА, а в качестве перемешивающего — ДИТРА.

ДИТРБ — датчик, моделирующий несколько параллельно работающих ДСЧ ДИТРА. Поскольку вся информация, необходимая для генерации очередного случайного числа, содержится в предыдущем случайном числе, для работы многомерного датчика достаточно одного массива, хранящего сгенерированные каждым датчиком числа. Особо следует выделить проблему инициализации массива — для этого используется независимый мультипликативный ДСЧ по модулю 8191.

ФОРСБ – датчик, моделирующий несколько параллельно работающих датчиков ФОРСА.

ЛПТА – датчик, генерирующий ЛП$_\tau$-последовательность [4]. ДСЧ реализует "сверхбыстрый" алгоритм с использованием кода Грея.

ЛПТС – датчик ЛПТА с рандомизацией. После того, как вектор (x_1, x_2, ..., x_n) ЛП$_\tau$-чисел сформирован, он преобразуется в новый вектор по формуле $x_i' = A \cdot x_i + C \pmod m$, где А и С – константы, выбираемые по правилу ФОРСА. Поскольку датчик ФОРСА осуществляет взаимно однозначное соответствие между целыми числами, укладывающимися в машинное слово, эта операция не изменяет свойство ЛП$_\tau$-вектора покрывать весь n-мерный гиперкуб, однако, как показывают результаты тестирования, она существенно улучшает локальные свойства ЛП$_\tau$-последовательности.

Краткое обоснование тестов

В следующем пункте представлена таблица, в которой отражены результаты тестирования восьми описанных ДСЧ. Часть тестов известна – их краткое описание будет дано в комментариях к таблице, однако некоторые тесты являются частично или полностью оригинальными и их математическому обоснованию посвящен данный пункт.

Пусть вектор $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ распределен равномерно в единичном n-мерном гиперкубе. Образуем случайный вектор $y = (y_1, \dots, y_n)$, где $y_i = x_i \cdot x_0$; x_i, $x_0 \in \{x_i\}_{i=1}^{m}$, x_0 – фиксирована. Плотность распределения координат вектора y равна

$$p(y) = \int_y^1 \frac{dx_i}{x_i} = -\ln y, \qquad x_i \neq x_0.$$

Следовательно, функция распределения имеет вид

$$F(t) = \int_0^t p(y)\,dy = t - t \cdot \ln t. \tag{1}$$

Рассмотрим новый случайный вектор $y = (y_1, \dots, y_n)$, образованный по формуле

$$y_i = \sqrt{-\ln x_i} \cdot \sin(x_0 \cdot \pi/2), \qquad i = \overline{1, n}.$$

Для вычисления его плотности распределения рассмотрим обратную зависимость $x_i = \exp\left(-\left(y_i / \sin(x_0 \cdot \pi/2)\right)^2\right)$ тогда $dx_i = x_i \cdot 2y\,dy/\sin^2(x_0 \cdot \pi/2)$ и, следовательно,

$$p(y) = \int_0^1 \frac{2y\,dx}{\sin^2(x \cdot \pi/2)} \cdot e^{-\left(\frac{y}{\sin(x \cdot \pi/2)}\right)^2}.$$

Введем новую переменную $z = y/\sin(x \cdot \pi/2)$, тогда

$$p(y) = \frac{4}{\pi} \int_y^\infty \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2 - y^2}} \cdot e^{-z^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2},$$

$$F(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-y^2} dy = ERF(t). \tag{2}$$

При выведении обеих функций распределения не рассматривался случай $x_i = x_0$, так как нас интересуют только корреляционные свойства вектора y.

В работе [8] предложено для исследований свойств последовательности $\{x_i\}$ рассмотреть случайную величину $y = max\{x_1, \dots, x_n\}$. Известно, что ее функция распределения равна

$$F(t) = t^n. \tag{3}$$

Случайная величина $y = -\ln x$ распределена по закону $F(t) = 1 - e^{-t}$. Рассмотрим многомерный случай: $y = \sum_{k=1}^{n} - \ln x_k$. Произведя действия, сходные с теми, что были выполнены при выведении функции распределения (2), получим: $p(y) = e^{-y} \cdot y^{n-1}/(n-1)!$ и

$$F(t) = \int_0^t e^{-y} \cdot \frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\, dy = -e^{-y} \cdot \frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\Big|_0^t + \int_0^t e^{-y} \cdot \frac{y^{n-2}}{(n-2)!}\, dy = \dots$$

$$= 1 - e^{-t}\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right). \tag{4}$$

Для математического обоснования следующего теста рассмотрим случайный вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$, распределенный внутри единичного n-мерного шара с плотностью, зависящей только от расстояния до центра шара $R^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$, $p(y) = \Phi(R^2)$. Для удобства вычислений перейдем к полярным координатам $R, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$. Поскольку якобиан перехода равен $\Delta = R^{n-1} \cdot \sin^{n-2}\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \sin\varphi_{n-2}$, совместная плотность распределения случайных величин $R, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ будет иметь вид $P = \Phi(R^2) \cdot R^{n-1} \cdot \sin^{n-2}\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \sin\varphi_{n-2}$.

Введем гипотетическую функцию распределения $f(t)$ и рассмотрим случайную величину $u = \cos\varphi_1 \cdot \sqrt{f^{-1}(R)}$, где f^{-1} – функция, обратная к f. Для того, чтобы это соотношение было определено по R для любых u, φ_1 необходимо и достаточно потребовать монотонности функции f в отображении интервала $(0, +\infty)$ на интервал (0,I). Тогда

$$R = f\left(\frac{u^2}{\cos^2\varphi_1}\right);\ dR = f'\left(\frac{u^2}{\cos^2\varphi_1}\right) \cdot \frac{2u\,du}{\cos^2\varphi_1};$$

$$p(u) = \int_0^{\pi/2} \dots \int_0^{\pi/2} \Phi\left(f^2\left(\frac{u^2}{\cos^2\varphi_1}\right)\right) \cdot f'\left(\frac{u^2}{\cos^2\varphi_1}\right) \cdot \frac{2u}{\cos^2\varphi_1} \times$$

$$\times f^{n-1}\left(\frac{u^2}{\cos^2\varphi_1}\right) \cdot \sin^{n-2}\varphi_1\, d\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \sin\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-1},$$

где $f'(t)$ – производная функции f по t. В этой формуле из (n-I)-го интеграла только один зависит от φ_1, остальные же могут быть вычислены. В оставшемся интеграле сделаем замену переменных $\tau = u/\cos\varphi_1$, тогда

$$p(u) = \int_u^{\infty} \Phi(f^2(\tau^2)) \cdot f'(\tau^2) \cdot f^{n-1}(\tau^2) \cdot \frac{(\sqrt{\tau^2 - u^2})}{\tau^{n-2}} \cdot \frac{\tau\, d\tau}{\sqrt{\tau^2 - u^2}} =$$

$$= \int_0^{\infty} F(z^2 + u^2) \cdot z^{n-2}\, dz, \quad \text{где } z^2 = \tau^2 - u^2,$$

$$F(t) = \Phi(f^2(t)) \cdot f'(t) \cdot f^{n-1}(t) / t^{\frac{n-2}{2}}.$$

Потребуем от функции F выполнения свойства $F(a+b) = F_1(a)\cdot F_2(b)$ и для простоты ограничимся случаем $F(t) = ce^{-\alpha t}$. Тогда при $\alpha = 1/2 \Rightarrow p(u) = e^{-u^2/2}$ и, следовательно,

$$\phi(f^2(t))\cdot f^{n-1}(t)\,df(t) = ce^{-t/2}\cdot t^{\frac{n-2}{2}}\,dt. \tag{5}$$

Пусть

$$V(z) = V_0\int_0^z e^{-t/2}\cdot t^{\frac{n-2}{2}}\,dt, \quad 0 \le z \le +\infty;$$

$$W(r) = W_0\int_0^r \phi(t)\cdot t^{\frac{n-2}{2}}\,dt, \quad 0 \le r \le 1,$$

константы нормировки V_0 и W_0 выбираются из граничных условий $V(0) = W(0) = 0$; $V(\infty) = W(1) = 1$. Тогда из (5) следует

$$W(f^2(t)) = cV(t) + D. \tag{6}$$

Поскольку решить это уравнение относительно функции $f(t)$ в явном виде невозможно (хотя $V(z)$ и $W(r)$ могут быть получены путем интегрирования по частям), программно проверка того, что случайная величина u имеет нужную плотность распределения, была реализована следующим образом: пусть $u_1, u_2, \dots, u_n$ – точки разбиения интервала $(0, \infty)$ на отрезки с равной вероятностью попадания в каждый. Рассмотрим два случая.

1. f – монотонно-возрастающая функция. Если $u_k \le \infty < u_{k+1}$, то

$$f^2\left(\frac{u_k\cdot R^2}{x_1^2}\right) \le R^2 < f^2\left(\frac{u_{k+1}\cdot R^2}{x_1^2}\right),$$

так как $u = x_1\cdot\sqrt{f^{-1}(R)/R^2}$. Применим к последнему неравенству оператор $W(r)$ и, с учетом (6) при $C = 1$, $D = 0$, в силу произвольности выбора порядка следования координат, получим:

$$V\left(\frac{u_k\cdot R^2}{x^2}\right) \le W(R^2) < V\left(\frac{u_{k+1}\cdot R^2}{x^2}\right). \tag{7}$$

2. f – монотонно-убывающая функция. Произведя аналогичные действия, получим:

$$V\left(\frac{u_k\cdot R^2}{x^2}\right) \le 1 - W(R^2) < V\left(\frac{u_{k+1}\cdot R^2}{x^2}\right). \tag{8}$$

Результаты тестирования ДСЧ

Тесты	Датчики							
	БРЕНТ	ДИТРА	ДИТРБ	ФОРСА	ФОРСБ	МАРСА	ЛПТА	ЛПТС
	Время, с, моделирования 20000 точек							
	7,38	5,70	6,18	6,08	6,61	6,92	11,0	11,72
χ^2	+	+	+	+	+	+	−*	−*
КС	−	-¦-	+	-¦-	+	+ +	−*	−*
1	-¦-	+	+	+ +	+ +	+ +	-¦-	-¦-
1КС^2	+	-¦-	+	-¦-	+	-¦-	−	-¦-
2	-¦-	+	-¦-	+	+	+	-¦-	+
2КС^2	-¦-	-¦-	-¦-	−	-¦-	−	−	−

Продолжение таблицы

Тесты	Датчики							
	БРЕНТ	ДИТРА	ДИТРБ	ФОРСА	ФОРСБ	МАРСА	ЛПТА	ЛПТС
	Время, с, моделирования 20000 точек							
	7,38	5,70	6,18	6,08	6,61	6,92	11,0	11,72
3	-¦-	-¦-	+	-¦-	+	-¦-	—	-¦-
3КС^2	—	-¦-	+	—	—	-¦-	—	-¦-
4	-¦-	—	-¦-	-¦-	-¦-	+	—	-¦-
СЕРИЙ	—	+	+	-¦-	-¦-	+	+ +	+
АББЕ	.94	.42	.92	.63	.10	.71	.89	.33
A	-¦-	—	—	—	—	+	-¦-	-¦-
B	—	+	—	-¦-	-¦-	-¦-	+	+
C	—	-¦-	—	—	—	—	+	+

«—» – ДСЧ не прошел данный тест

«-¦-» – результаты тестирования находятся на грани приемлемости

«+» – ДСЧ прошел тест удовлетворительно

«+ +» – тест пройден более чем удовлетворительно.

Приведены результаты тестирования 20-мерных случайных векторов, распределенных равномерно в единичном гиперкубе. Каждый тест сводится к проверке того, насколько близка эмпирическая функция распределения случайной величины к модельному закону распределения. Аналитический вид функций распределения был выведен в предыдущем пункте.

Тесты "хи – квадрат" и "Колмогорова – Смирнова" общеизвестны [8] . В таблице они обозначены, соответственно, " χ^2 " и "КС". Первый тест удобен в случае, когда существует конечное число категорий случайных величин (в непрерывном случае интервал моделирования разбивается на подинтервалы), тест же "КС" исследует функцию распределения, поэтому используется для проверки непрерывно-распределенных случайных величин. Знаки «—*» в графах проверки датчиков ЛПТА и ЛПТС означают, что датчики прошли тесты "слишком хорошо", настолько хорошо, что генерируемые ими последовательности обнаруживают свою неслучайность.

Цифрой 1 обозначен тест, исследовавший функцию распределения (1). Тест 1КС^2 – тест "Колмогорова-Смирнова дважды" функции распределения (1). Известно [8] , что характеристики Колмогорова-Смирнова сами являются реализацией случайной величины с функцией распределения $F(t) = 1 - e^{-2t^2}$. Тест, таким образом, состоит в проверке распределения критерия "КС", определяемого по нескольким выборкам фиксированной длины, опять же с помощью критерия "КС". Тест выявляет как локальные, так и глобальные отклонения от модельного закона, однако, требует значительных затрат машинного времени.

Аналогичным образом в строках 2 и 2КС^2 изображены результаты исследования функции распределения (2), в строках 3 и 3КС^2 – функции распределения (3) и в строке 4 – закон распределения (4).

Тесты СЕРИЙ и АББЕ взяты из работы [9] . Они исследуют на стохастическую независимость выборку большого объема (в данном случае 100 тысяч точек).

Тест серий проверяет несмещение среднего в ходе выборки. Вся выборка разбивается на серии – отрезки, на которых случайные числа последовательно возрастают или убывают. Подсчитывается число серий и их максимальная длина.

Тест АББЕ проверяет независимость выборки нормально распределенных случайных величин. Для перевода равномерного распределения в нормальное использовалась функция обратная к интегралу ошибок ERF. В таблице приведены значения критерия АББЕ - уровни значимости, в соответствии с которыми результаты считаются стохастически независимыми.

Последние три строчки - результаты теста, названного авторами локально - круговым. Проверкой неравенств (7)-(8) исследовалась способность датчиков равномерно размещать точки внутри многомерной области. По условию теста необходимо, чтобы случайный вектор $x=(x_1,\dots,x_n)$ был распределен внутри n-мерного шара с плотностью $p(R)$, зависящей только от расстояния до центра шара. Конкретный вид плотностей был выбран из работы [10].

В тесте "А" исследовалось распределение, равномерное внутри шара $p(R)\equiv 1$.

В тесте "В" исследовались вектора с независимыми нормально распределенными компонентами $p(R)=e^{-R^2}$.

Тест "С" проверял распределение, получаемое из равномерного на $(n+1)$ - мерной сфере посредством отбрасывания одной координаты. Искомая плотность распределения внутри n-мерного шара имеет вид [10] : $p(R)=1/\sqrt{(1-R^2)}$.

В результате проверки датчиков с помощью описанных тестов были выявлены следующие закономерности.

1. Все ДСЧ продемонстрировали глобальные отклонения от случайности типа медленно меняющейся периодичности.

2. Параллельные датчики обладают лучшими, чем у одномерных, свойствами равномерности и некоррелированности.

3. Датчики, основанные на ЛП$_\tau$-последовательностях, как и следовало ожидать, оказались лучшими по критериям равномерности заполнения n-мерного гиперкуба, однако, они обладают существенно худшими корреляционными свойствами (то есть случайностью "в малом").

4. При проверке ДСЧ ЛПТА были выявлены скачкообразные изменения результатов тестов в зависимости от длины выборки. По-видимому, это связано с тем, что алгоритм ЛП$_\tau$ "слишком регулярен". Его рандомизация помогает избавиться от этих скачкообразных зависимостей и существенно улучшает локальные корреляционные свойства, однако, на 6 % увеличивает время генерации и несколько ухудшает показатели независимости длинной выборки.

Заключение

Авторы не нашли среди опробованных универсального датчика, одинаково хорошо работающего на всех типах оптимизационных задач, однако, результаты проделанной работы и накопленный опыт позволяют дать некоторые рекомендации.

1. При моделировании случайных векторов лучше использовать специализированные векторные датчики вместо многократного вызова одномерных. Это не только улучшит корреляционные свойства, но и поможет избежать скачкообразного изменения качества датчика при изменении размерности.

2. При выборках небольшой длины или при использовании векторов малой размерности рекомендуются ДСЧ ДИТРБ и ФОРСБ, как наиболее простые в программной реализации. Преимущества более сложных датчиков в этих случаях не сказываются.

3. В случае, когда время выполнения одной итерации поиска довольно велико и, вследствие этого, надо небольшим числом точек просмотреть гиперкуб большой раз-

мерности, а корреляционные свойства получаемой последовательности не особенно важны, лучше всего подходят датчики ЛП$_c$.

4. Если пользователю необходимы одновременно и хорошие корреляционные свойства и генерация средней длины независимых выборок не очень большой размерности, то при нежестких требованиях к тому и другому может быть рекомендован ДСЧ МАРСА. Этот датчик подходит также в случае, когда экспериментатор затрудняется сформулировать свои требования, поскольку является датчиком удовлетворительного качества по многим критериям сразу, то есть в некотором смысле универсальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров М.Л., Галль Л.Н., Саченко В.Д.//Научные приборы. 1976. № 12. С.26-33.

2. Растригин Л.А. Статистические методы поиска. М.: Наука, 1986.

3. Marsaglia G. Random numbers fall mainly in the planes. Proc.Nath.Acad. Sci. (USA). 1968. N 61. P. 25-28.

4. Соболь И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М.: Наука, 1981.

5. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980.

6. Brenf R. Algorithms for minimization nithout derivatives. N.Y., Prentice hall, 1973.

7. Ahrens J.H., Diefer V., Grube A. Pseudo-random numbers: a new proposal for the choise of multiplicators. CASM. V.15 (1972), N 10. P. 873-882.

8. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. М.: Мир, 1977.

9. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. Основы моделирования и первичной обработки данных. М.: Финансы и статистика, 1983.

10. Жиглявский А.А. Математическая теория глобального случайного поиска. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.