

УДК 519.24

Оптимизация мультиплексных систем измерений пуассоновских потоков частиц при ограниченных ресурсах. Мельдя А.Л., Попова Л.П., Седунов Е.В. // Научное приборостроение. Автоматизация научных исследований. Л.: Наука, 1988, с. 79

Рассмотрена задача оптимизации режима измерения потока частиц в мультиплексных системах с учетом статистических флуктуаций сигнала и собственного шума приемника, распределенных по закону Пуассона, в условиях, когда число измерений существенно ограничено. Лит. - 6 назв., ил. - 2.

ОПТИМИЗАЦИЯ МУЛЬТИПЛЕКСНЫХ СИСТЕМ ИЗМЕРЕНИЙ
ПУАССОНОВСКИХ ПОТОКОВ ЧАСТИЦ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕСУРСАХ

К числу весьма распространенных объектов исследований в масс-спектрометрии, электронной спектроскопии, оптическом приборостроении и т.д. относятся потоки частиц (ионов, электронов, фотонов и т.п.), флуктуирующие во времени в соответствии со своей квантовой природой. В тех случаях, когда квантовыми, или, как чаще говорят статистическими флуктуациями нельзя пренебречь по сравнению с шумами измерительной аппаратуры, обычно применяют режим счета частиц. Примером может служить фотонная спектроскопия в коротковолновой области спектра.

Наличие статистических флуктуаций сигнала существенно ухудшает информационные характеристики спектральных приборов [1], и задача оптимизации режимов измерений в этих условиях является актуальной. Цель работы заключается в рассмотрении этой задачи применительно к мультиплексным системам измерений пуассоновских потоков частиц при дополнительном ограничении на экспериментальные ресурсы, т.е. на длительность, число измерений и т.д.

Под мультиплексным прибором в широком смысле понимается [1] линейный спектральный прибор, информация с которого имеет вид интегрального образа неизвестного распределения, а не является его отсчетами непосредственно, как в традиционных измерительных устройствах. В данной работе этот термин понимается в более узком смысле, а именно: рассматриваются только такие мультиплексные приборы, аппаратные функции которых являются индикаторами многосвязных подмножеств спектральной области. Другими словами, полученные ниже результаты применимы к Адамар-спектрометрам, но не относятся к Фурье-спектрометрам.

Основная задача, которая рассматривается в работе, состоит в оптимальном (в некотором смысле) выборе бинарных масок в мультиплексных системах измерений с учетом шума приемника и статистических флуктуаций сигнала при условии, что число различных измерений ограничено. Показано, что в рассматриваемой постановке задача оптимального выбора режима измерений может быть сведена к аналогичной задаче без ограничений на число измерений. На численных примерах продемонстрировано, что использование оптимальных режимов позволяет существенно увеличить точность измерений по сравнению с классическими схемами сканирующего и Адамар-спектрометра.

Физическая постановка задачи

Пусть на вход спектрального прибора с конечным разрешением поступают потоки частиц, содержащие информацию о неизвестном спектральном (пространственном или временном) распределении исследуемой физической величины $v(x)$. Поскольку в спектроскопических измерениях функция $v(x)$ локально не определена, то реально допустимыми измерению (без учета статистических флуктуаций) оказываются только значения некоторых функционалов u_j от распределения $v(x)$, которые задаются аппаратными функциями $a_j(x)$ прибора в каждом j -м измерении:

$$u_j(b) = \int_{R^k} a_j(x) v(x) d\mu(x), \quad (1)$$

где $j \in 1:n$ - индекс, нумерующий наблюдения и играющий роль параметра настройки
 R^k - спектральная область (в практических задачах $k = 1$ или 2), μ - мера Лебега.

Физический смысл аппаратной функции в каждой задаче имеет свою специфику. Так, в мультиплексных системах измерений, которым посвящена данная работа, аппаратная функция физически может быть реализована, например, в виде механического прерывателя, который кодирует элементы спектральной области, пропуская или задерживая соответствующие спектральные составляющие сигнала [1]. Такому методу измерений отвечает некоторое деление анализируемой спектральной области на подобласти $\{\Delta_k\}_{k=1}^m$, внутри которых спектральное распределение усредняется. Поэтому анализируемый спектр может быть представлен в виде разложения

$$\theta(x, \theta) = \sum_{k=1}^m \theta_k \varphi_k(x), \quad (2)$$

где $\{\theta_k\}_{k=1}^m$ - неизвестные параметры, по системе кусочно-постоянных функций

$$\varphi_k(x) = [\mu(\Delta_k)]^{-1} \chi_{\Delta_k}(x), \quad (3)$$

$\chi_{\Delta_k}(x)$ - индикатор множества Δ_k ; $x = \bigcup_{k=1}^m \Delta_k$, $\Delta_i \cap \Delta_k = \emptyset$, если $i \neq k$;
 $\mu(\Delta_k)$ - μ - мера Δ_k .

Функциональные схемы устройств, реализующих такой метод измерений, весьма разнообразны. Приведем только два примера из оптики. Как известно, среди оптических методов анализа состава и структуры веществ особое место занимают спектроскопические методы, позволяющие исследовать спектры испускания, поглощения, отражения, рассеяния. Изучение таких спектров предоставляет исследователю информацию о физических процессах в анализируемых объектах. На рис. 1 и 2 приведены схемы спектрофлуориметра для исследования распределения излучения флуоресценции по длинам волн λ и установки для измерения индикаторы рассеяния света на молекулах раствора, т.е. распределения интенсивности рассеянного света по углам α . В обоих случаях с помощью сменных щелевых систем реализуется алгоритм измерения искомой функциональной зависимости в виде (2), (3).

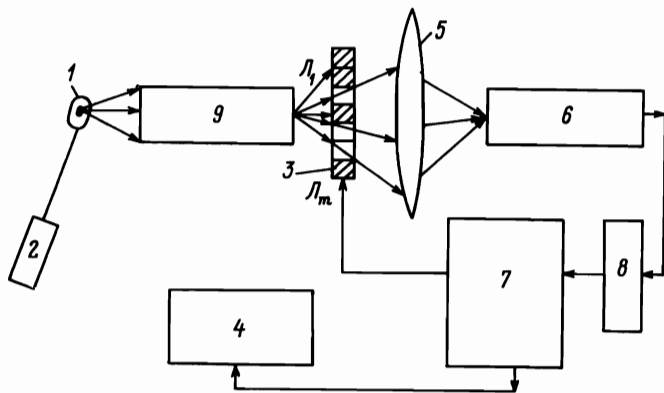


Рис. 1. Функциональная схема импульсного Адамар-спектрофлуориметра: 1 - кювета; 2 - источник; 3 - сменная щелевая система; 4 - система отображения информации; 5 - фокусирующая оптическая система; 6 - фотоприемник; 7 - система управления и обработки информации; 8 - усилитель; 9 - спектрограф

Вопросам оптимального выбора бинарных масок в таких системах при работе в аналоговом режиме посвящена обширная литература (см. библиографию в работе [1]). Однако задача оптимизации характеристик мультиплексных систем при наличии статистических фликтуаций не имеет в настоящее время исчерпывающего решения (см. [3]). Важно обратить внимание еще на то, что в практических задачах нередко возникает ситуация, когда число различных наблюдений ограничено, причем принципиальный интерес представляет случай

$$n < m,$$

(4)

который можно связывать с ограниченностью экспериментальных ресурсов в смысле стоимости, времени, количества вещества, разрешающей способности прибора и т.п. В качестве примера можно указать системы регистрации и анализа спектра в устройствах, приведенных на рис. 1 и 2, когда необходимо учитывать процессы разрушения исследуемого биообъекта под воздействием импульсного излучения, что приводит к ограничению на число импульсов возбуждения, т.е. на число измерений n . Очевидно, что при условии (4) нельзя восстановить спектр в виде (2) и приходится довольствоваться более грубой моделью:

$$\hat{\theta}(x) = \sum_{i=1}^{m_1} \hat{c}_i \hat{\varphi}_i(x), \quad m_1 < m, \quad (5)$$

где $\hat{\varphi}_i(x) = [\mu(\delta_i)]^{-1} \chi_{\delta_i}(x)$, $x = \bigcup_{i=1}^{m_1} \delta_i$, $\delta_i \cap \delta_s = \emptyset$, $i \neq s$.

Математическая формулировка задачи

Рассмотрим схему измерения пуассоновского потока из работы [4]. Пусть на компактной области $X \subset R^k$ задана положительная мера ν , определяющая скорости пуассоновского потока на X , т.е. число событий $N(\Delta, t)$, возникающих в подобласти $\Delta \subset X$ за время t , представляет собой пуассоновскую случайную величину (ПСВ): $EN(\Delta, t) = \nu(\Delta)$, причем $N(\Delta_1, t_1)$ и $N(\Delta_2, t_2)$ независимы, если множества $\Delta_1 \cdot t_1$ и $\Delta_2 \cdot t_2$ не пересекаются. Пусть, далее, событие, возникающее в точке x в течение интервала t_j , регистрируется с вероятностью $a_j(x) \in [0, 1]$, и эксперимент над потоком $N(\Delta, t)$ состоит в наблюдении ПСВ

$$y_j = N_j + \varepsilon_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (6)$$

где N_j - число событий, зарегистрированных за время t_j ;

$$EN_j = t_j \int_X a_j(x) d\nu = t_j \int_X a_j(x) b(x) d\mu(x) = t_j u_j(b);$$

$b(x)$ - плотность пуассоновского потока по лебеговой мере μ ;

ε_j - ПСВ (шум приемника), $E\varepsilon_j = t_j \nu_\varepsilon$.

В описанной выше схеме под режимом измерений ξ естественно понимать совокупность функционалов u_1, \dots, u_n вида (1), на которых производится наблюдение неизвестного распределения $b(x)$ и соответствующих им интервалов времени t_1, \dots, t_n , нормированных на общее время эксперимента $t_3 = \sum_{j=1}^n t_j$:

$$\xi = (u_1, \dots, u_n; \rho_1, \dots, \rho_n), \quad (7)$$

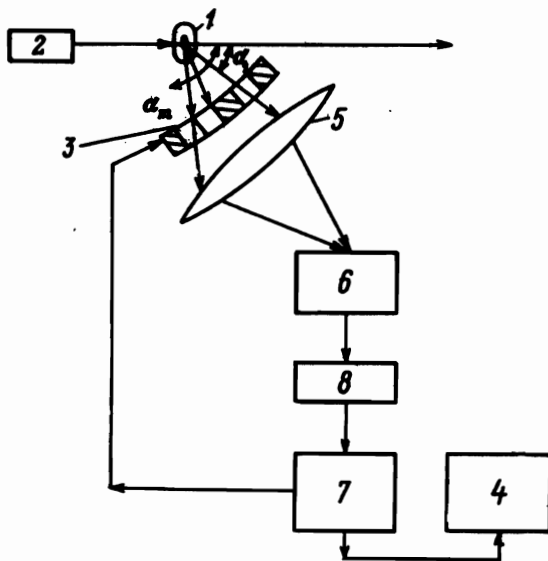


Рис. 2. Функциональная схема установки измерения индикатрисы светорассеяния

где $u_j \in U = \{u: u(\theta) = \int_{\mathcal{X}} a(x) b(x) d\mu(x), 0 \leq a(x) \leq 1\}$,

$\rho_j = t_j / t_3$ - веса наблюдений, $j \in 1:n, n < m$.

В задаче восстановления спектра при ограничениях на ресурсы принципиально существуют два источника расхождения между полученным приближением $\hat{b}(x)$ вида (5) и истинным распределением $b(x, \theta)$ вида (2): систематическая ошибка, вызванная неадекватностью принятой модели реальному объекту, и случайная ошибка, связанная с наличием случайной погрешности в результатах наблюдений по схеме (6).

Будем характеризовать систематическую ошибку в среднеквадратичной метрике:

$$B = \int_{\mathcal{X}} [b(x, \theta) - E\hat{b}(x)]^2 d\mu(x). \quad (8)$$

Для минимизации (8) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие несмещенности (допустимости оценивания параметрической вектор-функции $T\theta$):

$$E\hat{c} = T\theta, \quad (9)$$

где $\hat{c} = (\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{m_1})^T$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)^T$, T - матрица размера $m_1 \cdot m$ с элементами

$$t_{ik} = \int_{\mathcal{X}} \hat{\varphi}_i(x) \varphi_k(x) d\mu(x) / \int_{\mathcal{X}} \hat{\varphi}_i^2(x) d\mu(x), \quad \begin{matrix} i \in 1:m_1, \\ k \in 1:m. \end{matrix} \quad (10)$$

Если \hat{c} - наилучшая линейная несмещенная в смысле (9) оценка для $c = T\theta$, то ее нормированная ковариационная матрица $D_c(\xi, \theta)$ зависит, как следует из (6), от неизвестного распределения $b(x, \theta)$. Поэтому в качестве критерия оптимальности в данной работе будет использоваться критерий "локальной" D_c -оптимальности, т.е. оптимальный режим соответствует решению следующей задачи:

$$\xi^* = \text{Arg inf}_{\xi \in \Xi_{\tau}^n} \det D_c(\xi, \theta^{(0)}), \quad (11)$$

где Ξ_{τ}^n - множество режимов ξ вида (7); допускающих оценку $c = T\theta$ при $n < m$, $\theta^{(0)}$ - априори заданный вектор параметров.

Методика расчета и основные результаты

Пусть при выборе систем функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^m$ и $\{\hat{\varphi}_i(x)\}_{i=1}^{m_1}$ принято $\mu(\Delta_k) = \Delta$, $k \in 1:m$, $\mu(\delta_i) = z_i \Delta$, z_i - целые положительные числа, $\sum_{i=1}^{m_1} z_i = m$. Тогда, продолжая (10), получим

$$t_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta_k \cap \delta_i \neq \emptyset, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (12)$$

и T - блочно-диагональная матрица размера $m_1 \cdot m$, на главной диагонали которой стоят $(I \times z_i)$ - блоки вида (I, \dots, I) , $i \in 1:m_1$, а вне главной диагонали - нулевые блоки. Следовательно,

$$c = T\theta = (c_1, \dots, c_{m_1})^T, \quad \begin{matrix} c_i = \theta_{z_{i-1}+1} + \dots + \theta_{z_i-1+z_i}, \\ z_0 := 0, \end{matrix} \quad (13)$$

При $n < m$ наилучшая линейная несмещенная оценка \hat{c} дается формулой

$$\hat{c} = T\hat{\theta} = TF^+Y,$$

а ее нормированная ковариационная матрица вычисляется как

$$D_{\xi}(\xi, \theta) = M^{-1}(\xi, \theta) T^T,$$

где $M(\xi, \theta) = F^T D^{-1}(Y, \theta) F$ - информационная матрица, "+" - знак операции псевдообращения, $F = (f_{j1}, f_{j2}, \dots, f_{jm})_{j=1}^n$, $f_{ji} := \int_{\mathcal{X}} a_j(x) \varphi_i(x) d\mu(x) = u_j(\varphi_i)$, $i \in 1:m$, $j \in 1:n$, $Y = ((y_i | t_j) - v_{ij})_{j=1}^n$ - преобразованный вектор результатов наблюдений с ковариационной матрицей $D(Y, \theta)$, нормированной на общее время эксперимента:

$$D(Y, \theta) = \text{diag}([u_j(v(\theta)) + v_{ij}] / \rho_j)_{j=1}^n.$$

Наряду с задачей (II) рассмотрим задачу поиска локально D -оптимального режима для оценивания полного вектора параметров θ (без ограничений) на ресурсах):

$$\tilde{\xi} = \arg \inf \det D(\xi, \hat{\theta}^{(0)}),$$

(I4)

где $D(\xi, \theta) = M^{-1}(\xi, \theta)$. Из соотношения (I3) нетрудно установить связь задач (II) и (I4).

Пусть $\tilde{\xi}$ - решение задачи (I4) при $\hat{\theta}^{(0)} = (\hat{\theta}_1^{(0)}, \dots, \hat{\theta}_{m_1}^{(0)})^T$, $\hat{\theta}_1^{(0)} = \hat{\theta}_2^{(0)} = \dots = \hat{\theta}_{m_1}^{(0)} := \hat{\theta}_0$ в модели $\theta(x) = \sum_{i=1}^m \hat{\theta}_i \tilde{\varphi}_i(x)$:

$$\tilde{\xi} = (\tilde{a}_1(x), \dots, \tilde{a}_n(x); 1/n, \dots, 1/n), m_1 \leq n < m.$$

Тогда: 1. Локально $D_{\mathcal{C}}$ -оптимальный режим ξ^* в точке $\theta^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \dots, \theta_m^{(0)})^T$, $T\theta^{(0)} = \hat{\theta}^{(0)}$ для задачи (I4) в модели $\theta(x) = \sum_{k=1}^m \theta_k \varphi_k(x)$ имеет вид:

$$\xi^* = (a_1^*(x), \dots, a_n^*(x); 1/n, \dots, 1/n),$$

где $a_j^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \Delta_k, k \in J, \\ 0, & \text{если } x \in \Delta_k, k \notin J, \end{cases}$

$J = \{k \in 1:m \mid \theta_k \neq 0, \delta_k \in \text{supp } \tilde{a}_j\}$ входит в i -ю параметрическую функцию τ_i , причем

2. Режиму ξ^* соответствуют

$$F^* = \tilde{F} T, D_{\mathcal{C}}(\xi^*, \theta^{(0)}) = M^{-1}(\tilde{\xi}, \hat{\theta}^{(0)}),$$

где $\tilde{F} = (\tilde{f}_{j1}, \dots, \tilde{f}_{jm_1})_{j=1}^n$ - матрица, соответствующая режиму $\tilde{\xi}$,

$$\tilde{f}_{ji} = \int_{\mathcal{X}} \tilde{a}_j(x) \tilde{\varphi}_i(x) d\mu(x).$$

3. Набор целых положительных чисел $\{z_i^*\}_{i=1}^{m_1}$ таких, что

$$z_i^* = \begin{cases} z, & i \in 1:m_1 - r \\ z+1, & i \in (m_1 - r + 1): m_1, \end{cases}$$

где $m = z m_1 + r$, $0 \leq r \leq m_1 - 1$, является оптимальным по критерию минимума максимальной в области \mathcal{X} дисперсии оценки $\hat{\theta}(x)$ вида (5).

Итак, задача локально $D_{\mathcal{C}}$ -оптимального выбора режима сводится к задаче локально D -оптимального выбора режима меньшей размерности $m_1 (m_1 < m)$, и остается обратиться к работе [5], где показано:

1) режим $\tilde{\xi}$ характеризуется набором m_1 -мерных точек, образующих $(0, I)$ -матрицу $\tilde{F} = (\tilde{f}_{ji})_{j=1, i=1}^n$.

2) если $\tilde{\xi} = \nu_{\xi} / \tilde{\theta}_0$, $\tilde{\xi} \in [0, \infty]$ и ξ_{ℓ^*, ℓ^*+1} - положительный вещественный корень (он существует и единственен) уравнения

$$c_0 \tilde{\xi}^2 + c_1 \tilde{\xi} + c_2 = 0,$$

где $c_0 = (m_1 - 1)(\ell^* + 1)(m_1 - 2\ell^*)$, $c_1 = (m_1^2 \ell^* - 3m_1 \ell^{*2} + m_1^2 + \ell^{*2} + 3\ell^* - 3m_1 \ell^* - m_1 + 1)x$
 $\times \ell^*$, $c_2 = -\ell^{*2}(\ell^* + 1)(m_1 \ell^* - 1)$, $m_1 > 1$, $1 \leq \ell^* < m_1/2$,

то $\tilde{\xi}(\tilde{\xi})$ - локально D -оптимальный режим,

$$\tilde{\xi}(\tilde{\xi}) = \begin{cases} \xi_{\ell^*, \ell^*+1}, & \tilde{\xi} = \hat{\xi}_{\ell^*, \ell^*+1}, \\ \xi_{\ell^*+1}, & \hat{\xi}_{\ell^*, \ell^*+1} < \tilde{\xi} < \hat{\xi}_{\ell^*+1, \ell^*+2}, \\ \xi_1, & 0 \leq \tilde{\xi} < \hat{\xi}_{1,2}, \\ \xi_{0,5(m_1+1)}, & \hat{\xi}_{0,5(m_1-1); 0,5(m_1-1)+1} < \tilde{\xi} \leq \infty, m_1 - \text{нечетное}, \\ \xi_{0,5(m_1); 0,5(m_1+2)}, & \hat{\xi}_{0,5(m_1-2); 0,5m_1} < \tilde{\xi} \leq \infty, m_1 - \text{четное}, \end{cases}$$

ξ_{ℓ^*} - режим, содержащий все $n_{\ell^*} = C_{m_1}^{\ell^*}$ m_1 - точки с ℓ^* единицами и $(m_1 - \ell^*)$ нулями, а ξ_{ℓ^*, ℓ^*+1} - режим, содержащий кроме того и m_1 - точки с $(\ell^* + 1)$ единицами и $(m_1 - \ell^* - 1)$ нулями (всего точек $n_{\ell^*, \ell^*+1} = C_{m_1}^{\ell^*} + C_{m_1}^{\ell^*+1}$), причем веса наблюдений в обоих случаях распределены равномерно.

Замечание 1. Предположение относительно равенства компонент вектора $\hat{\theta}^{(0)}$ существенно упрощает задачу, но в то же время не является слишком обременительным, так как его справедливость можно при необходимости обеспечить за счет неравномерного по мере μ разбиения спектрального интервала.

Замечание 2. Можно указать режим $\tilde{\xi}$ с числом точек меньшим, чем, например, n_{ℓ^*} , если только существует уравновешенная неполная блок-схема [6] размещения m_1 элементов по n блокам с числом ℓ^* различных элементов в каждом блоке, у которой $n < n_{\ell^*}$, причем матрицей измерений \tilde{F} режима $\tilde{\xi}$ служит матрица инцидентности этой блок-схемы.

Замечание 3. Ковариационная матрица оценки $\hat{\xi}$ при любом $D_{\tilde{\xi}}$ - оптимальном режиме измерений может быть вычислена по следующей простой формуле

$$D_{\xi}(\xi^*, \theta^{(0)}) = M^{-1}(\tilde{\xi}, \hat{\theta}^{(0)}) = \alpha I_{m_1} - \beta E_{m_1}, \quad (15)$$

где

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\tilde{\theta}_0(\ell^* + \tilde{\xi})m_1(m_1 - 1)}{\ell^*(m_1 - \ell^*)}, & \text{если } \xi_{\ell^*-1, \ell^*} < \tilde{\xi} < \xi_{\ell^*, \ell^*+1}, \\ \frac{\tilde{\theta}_0(\ell^* + \tilde{\xi})(\ell^* + 1 + \tilde{\xi})m_1(m_1^2 - 1)}{(\ell^* + 1)(m_1 - \ell^*)(\ell^*m_1 + m_1\tilde{\xi} - \tilde{\xi})}, & \text{если } \tilde{\xi} = \xi_{\ell^*, \ell^*+1}, \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} \tilde{\theta}_0(\ell^* + \tilde{\xi}) \frac{m_1(\ell^* - 1)}{\ell^{*2}(m_1 - \ell^*)}, & \text{если } \xi_{\ell^*-1, \ell^*} < \tilde{\xi} < \xi_{\ell^*, \ell^*+1}, \\ \frac{\tilde{\theta}_0(\ell^* + \tilde{\xi})(\ell^* + 1 + \tilde{\xi})m_1(m_1 + 1)(m_1\ell^* - 1 + m_1\tilde{\xi} - \tilde{\xi})\ell^*}{(\ell^* + 1)(\ell^*m_1 + m_1\tilde{\xi} - \tilde{\xi})(m_1 - \ell^*)(\ell^{*2}m_1 + \ell^*m_1 + m_1\tilde{\xi} + m_1\ell^*\tilde{\xi} - \ell^*\tilde{\xi})}, & \\ \text{если } \tilde{\xi} = \xi_{\ell^*, \ell^*+1}, \end{cases}$$

I_{m_1} - единичная матрица, E_{m_1} - матрица из единиц.

Замечание 4. Приведенные выше результаты сохраняют свою силу и в отсутствии статистических флюктуаций ($\theta^{(0)} = 0$), т.е. при аналоговом режиме работы приемника.

Обсуждение результатов и пример

Задача (14) допускает табулирование (см. [5]), так как для любого заданного отношения $\gamma = \xi/m_1 = \nu_{\xi} / \int_{\mathcal{X}} \theta^{(0)}(x) d\mu(x)$, характеризующего относительную интенсивность шума приемника в данной задаче, можно указать группы (одну или две) строк матрицы локально \mathcal{D} -оптимального режима с равномерным распределением весов между всеми наблюдениями. Далее, весь диапазон $[0, \infty]$ изменения γ разбивается легко вычисляемыми точками $\gamma_{\ell^*, \ell^*+1}$ на интервалы $(\gamma_{\ell^*-1, \ell^*}, \gamma_{\ell^*, \ell^*+1})$, в каждом из которых оптимальный режим измерений ξ_{ℓ^*} : бинарные фильтры-маски с ℓ^* пропускаемыми и $(m_1 - \ell^*)$ задерживающими элементами. При $\gamma < \gamma_{1,2}$ оптимальный режим соответствует сканирующему спектрометру ($\ell^* = 1$), а при $\gamma > \gamma_{[(m_1-1)/2], [(m_1-1)/2]+1}$ - классическому Адамар-спектрометру ($[-]$ -целая часть). В точках перехода, т.е. при $\gamma = \gamma_{\ell^*, \ell^*+1}$ оптимальным оказывается режим ξ_{ℓ^*, ℓ^*+1} (используются маски с ℓ^* и $\ell^* + 1$ пропускаемыми элементами). В качестве примера в таблице для $m = 30$ и $\gamma = (\gamma_{\ell^*-1, \ell^*} + \gamma_{\ell^*, \ell^*+1})/2$ указаны некоторые характеристики локально \mathcal{D} -оптимальных режимов $\xi^*(\gamma) = \xi_{\ell^*}$.

Проиллюстрируем на простом примере стратегию решения задачи (11) путем сведения ее к задаче (14).

Пример. Пусть $m = 30$, $\gamma \approx 0,28$. Начнем с задачи (14). Так как $\gamma_{9,10} \approx 0,22 < \gamma \approx 0,28 < \gamma_{10,11} \approx 0,33$, то $\ell^* = 10$ и локально \mathcal{D} -оптимальный режим содержит все 30-мерные точки с $\ell^* = 10$ единицами и $m - \ell^* = 20$ нулями. Расчеты по формулам (15) показывают, что при одинаковом общем числе измерений выигрыш по дисперсии оценок параметров составляет в этом случае $\approx 3,63$ раза по сравнению со сканирующим спектрометром и $\approx 1,15$ раза по сравнению с классическим Адамар-спектрометром (см. также таблицу). Однако практически такой эксперимент реализовать весьма сложно, так как он требует слишком большого числа различных измерений (числа смен бинарных масок). Поэтому рассмотрим в постановке задачи (11) усеченную модель $\hat{\theta}(x)$ вида (5) с $m_1 = 7 < m = 30$. Учитывая представление $30 = 4 \cdot 7 + 2$, примем $z_i = 4, i \in \{1; 5\}; z_6 = z_7 = 5$. Так как при $m_1 = 7$

$$\gamma_{2,3} \approx 0,18 < \gamma \approx 0,28 < \gamma_{3,4} \approx 1,27,$$

то $\ell^* = 3$. Один из возможных локально \mathcal{D} -оптимальных режимов ξ^* по отношению к модели (5), таким образом, содержит все $n_{\ell^*} = C_{m_1}^{\ell^*} = C_7^3 = 35$ $m_1 = 7$ -мерных точек с $\ell^* = 3$ единицами и $m_1 - \ell^* = 4$ нулями; но он не удовлетворяет условию $n < m$ и не может быть использован для построения $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ -оптимального режима ξ^* . Однако

D -оптимальные режимы измерений при $\gamma_{2^{k-1}, 2^k}^{(D)} < \gamma < \gamma_{2^k, 2^{k+1}}^{(D)}$, $m=30$

ℓ^*	$\bar{F} = \frac{\gamma_{2^{k-1}, 2^k}^{(D)} + \gamma_{2^k, 2^{k+1}}^{(D)}}{2}$	$\theta_0 M_{ii}$	$\theta_0 M_{ik}$	$\theta_0^{-1} \det^{1/m} M^{-1}$	$\theta_0^{-1} \text{tr} M^{-1}$	$\left(\frac{\det M_{\bar{c}}^{-1}}{\det M^{-1}}\right)^{1/m}$	$\left(\frac{\det M_A^{-1}}{\det M^{-1}}\right)^{1/m}$
1	0,00058	27,54972	0,00000	30,52	915,79	1,000	1,749
2	0,00313	25,85109	0,89141	31,75	959,14	1,033	1,689
3	0,00878	23,99291	1,65468	33,71	1027,39	1,124	1,609
4	0,01333	22,09525	2,28572	36,21	1112,34	1,284	1,525
5	0,03291	20,18153	2,78366	39,30	1215,67	1,517	1,443
6	0,05411	18,25934	3,14816	43,11	1342,05	1,825	1,367
7	0,08431	16,33170	3,37897	47,88	1499,19	2,211	1,296
8	0,12716	14,39981	3,47582	53,99	1699,24	2,675	1,232
9	0,18861	12,46387	3,43831	62,03	1962,21	3,219	1,175
10	0,27907	10,52315	3,26581	73,10	2323,16	3,846	1,125
11	0,41863	8,57563	2,95711	89,26	2849,83	4,556	1,083
12	0,65193	6,61640	2,50967	115,15	3692,72	5,355	1,050
13	1,10395	4,63228	1,91681	163,73	5273,20	6,251	1,024
14	2,33710	2,57431	1,15400	293,30	9486,85	7,273	1,008

в данном случае существует [6, с.400] симметричная уравновешенная неполная блок-схема размещения $m,=7$ элементов по $n=7$ блокам с $\ell^*=3$ различными элементами в каждом блоке и матрицей инцидентности (которая и принимается за матрицу измерений режима ξ^*):

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь, наконец, можно указать матрицу измерений $F^* = \tilde{F}T$, где T определена в (12), искомого D_c -оптимального режима ξ^* :

$$F^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Режим ξ^* включает наименьшее возможное в условиях примера число $n^*=7$ измерений, причем каждое измерение входит с одинаковым весом. Возникающая при этом систематическая ошибка B приближения $\theta(x, \theta)$ моделью $\hat{\theta}(x)$ сведена к минимальному значению, которое дается выражением

$$B_{min} = \sum_{i=1}^{m_1} \left(\sum_{k=1}^{z_i} \theta_{z_{i-1}+k} \right)^2 / z_i.$$

Кроме того, режим ξ^* является наилучшим по критерию локальной D_c -оптимальности, характеризующему случайную ошибку приближения, в классе всех режимов ξ , минимизирующих систематическую ошибку B .

Приведенные результаты расчетов показывают, что при наличии априорной информации о соотношении статистических флуктуаций сигнала и собственного шума приемника можно добиться существенного улучшения точности восстановления сигнала, если вместо традиционных схем измерений использовать оптимальным образом рассчитанные мультиплексные системы.

Предложенный метод может быть рекомендован в тех случаях, когда число измерений существенно ограничено, и исследователь сознательно идет на появление систематической ошибки и некоторое увеличение случайной ошибки по сравнению с ситуацией, когда жесткие ограничения на экспериментальные ресурсы отсутствуют. Оптимальный выбор режима измерений позволяет минимизировать эту неизбежную плату за экономию ресурсов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сороко М.Л. Мультиплексные системы измерения в физике. М.: Атомиздат, 1980. 118 с.
2. Александров М.Л., Мельцин А.Л., Седунов Е.В.//Научное приборостроение. Л.: Наука, 1984. С.9-17.
3. Федоров Г.А. Радиационная интроскопия: Кодирование информации и оптимизация эксперимента. М.: Энергоиздат, 1982. 112 с.
4. Козлов В.П.//Тез. докл. Всес. конф. "Перспективные методы планирования и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов". М., 1982, Ч. I. С.192-193.
5. Козлов В.П., Седунов Е.В., Попова Л.П., Белозерова Л.Н. Таблицы D -оптимальных режимов измерений в Адамар-спектрометрии с учетом квантовых флуктуаций. Деп. в ВИНТИ 05.01.87. № 29-В 87.
6. Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970. 424 с.