УДК 578.087.I:62-5

Оценка параметра положения сигнала. Курочкин В.Е., Фельдман Б.Х.//Научное приборостроение. Автоматизация научных исследований. Л.: Наука, 1988, с. 68

Доказано, что при оценке параметра положения сигнала, рекуррентный алгоритм эффективнее интервального в информационном смысле. Наибольший эффект от использования рекурсивной процедуры получается при большом динамическом диапазоне изменения оцениваемого параметра сигнала. Лит. - 4 назв.

В.Е.Курочкин, Б.Х.Фельдман (НТО АН СССР)

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА ПОЛОЖЕНИЯ СИГНАЛА

Сущность проблемы оценки параметра положения сигнала при проектировании анализаторов сводится к созданию устройства-оценщика для преобразования аналогового сигнала x с целью получения в качестве выходного сигнала оптимальной оценки $\hat{c}$ параметра c. Оценщик обычно описывается некоторой математической операцией H(x) над входной переменной. Оптимальность оценки определяется в смысле некоторого критерия качества, который обычно соотносит оценку $\hat{c}$ и положение параметра c.

Когда x является процессом в реальном времени, оценщик может быть интервальным или рекуррентным. Рекуррентный оценщик выдает оптимальную оценку положения параметра $\hat{c}$ непрерывно во времени на основе наблюдения сигнала x. Интервальный оценщик обрабатывает входную переменную в течение фиксированного интервала времени и выдает точечную оценку $\hat{c}$ после завершения процесса обработки. Когда x является переменной в нереальном времени, оценщик может быть только интервальным.

Предположим, что оба оценщика спроектированы на основе какого-либо критерия качества и соотносят оценку параметра положения $\hat{c}$ с самим параметром c так, что на определенном этапе обработки сигнала дисперсии оценок $D(\hat{c})$ оказываются равными. Возникает вопрос: какой оценщик применять - рекуррентный или интервальный?

Применим недавно предложенный критерий [1], позволяющий на информационной основе сравнить упомянутые оценщики.

Согласно критерию, преимущество имеет оценщик, использующий для получения оценки параметра положения с заданной точностью минимальное количество информации по Шеннону.

Иными словами, оценщик должен обладать большей скоростью создания фишеровской информации:

$$\psi(\Delta) = \frac{I(\Delta)}{\tau(\Delta)}, \tag{1}$$

где $I(\Delta)$ – фишеровское информационное количество, получаемое на каждом шаге обработки при независимых выборках сигнала x_i;

$\tau(\Delta)$ – время, необходимое для оценки с точностью Δ.

Структура как рекуррентного, так и интервального оценщика сугубо цифровая и состоит из аналого-цифрового преобразователя и вычислителя, снабженного каналом ввода информации. При равенстве скоростей аналого-цифрового преобразования, разрядности и быстродействия вычислителей можно сравнивать только алгоритмы, определяющие тип оценщика, т.е. скорости создания фишеровской информации.

Заметим, что реализация оценщика по лучшему алгоритму в информационном смысле позволит обеспечить минимальную загрузку вычислителя оценщика.

Интервальный и рекуррентный алгоритмы

В терминах, используемых при проектировании оценщика, задача может быть сформулирована так. Имеются измерения сигнала $x_1, \dots, x_n$ неизвестного параметра c^*, содержащие случайные помехи ξ_i, $x_i = c^* + \xi_i$, $i = 1, \dots, n$. Помехи ξ_i независимы и имеют известную плотность распределения $p(x)$. Нужно оценить c^* по результатам наблюдений $x_1, \dots, x_n$.

Одним из основных методов, применяемых в построении алгоритмов оценивания, является метод максимального правдоподобия (ММП). Суть ММП заключается в том, что в качестве оценки параметра сигнала c_n для c^* берется значение, максимизирующее функцию правдоподобия $L(x_1, \dots, x_n; c) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i - c)$ [2]. Переходя от функции правдоподобия к ее логарифму, имеем

$$c_n = \arg\min_c I_n(c), I_n(c) = \sum_{i=1}^{n} F(x_i - c), F(x) = -\log p(x). \tag{2}$$

Последнее выражение задает оценку максимального правдоподобия. Если оценочная функция $F(x)$ дифференцируема и выпукла, то задача минимизации в (2) эквивалентна решению уравнения

$$I_n'(c) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i - c) = 0, \quad \varphi(x) = F'(x). \tag{3}$$

Во многих случаях это уравнение решено явно [3]. Так, для нормального распределения отсчетов x_i оценка параметра положения является выборочным средним, для распределения Лапласа – выборочной медианой, для равномерного распределения – полусуммой экстремальных значений и т.д.

Получение указанных оценок возможно как интервальными, так и рекуррентными алгоритмами. В работе [2] показано, что в случае выполнения условий регулярности, оценки, полученные, как рекуррентным, так и интервальным способом, по ММП эквивалентны и асимптотически эффективны, т.е. достигают границы Рао–Крамера.

Однако оптимальность оценок ММП имеет свою оборотную сторону – они оказываются чувствительными к отклонениям распределения от предполагаемого. В связи с этим возникает задача "огрубления" оценок ММП или, пользуясь современной терминологией, необходимо найти робастные алгоритмы оценивания.

Обычно истинное распределение помех $p(x)$ неизвестно, однако известна некоторая о нем информация. Так или иначе, можно считать, что известен некоторый класс распределений, которому принадлежит истинное распределение. Известно [2], что в данном случае целесообразно найти в этом классе наименее благоприятное распределение, а затем применить соответствующую ему оценку МП. При этом под наименее благоприятным распределением естественно полагать то, которое дает наихудшую границу неравенства Крамера-Рао, т.е. то, которое минимизирует фишеровскую информацию в известном классе распределений.

В работе [2] показано, что для класса невырожденных распределений, для которых $p(0) \geqslant 1/(2a) > 0$, т.е.в условиях практически полного отсутствия априорных сведений о распределении, наименее благоприятным является распределение Лапласа

$$p^*(x) = \frac{1}{2a} e^{-\frac{|x|}{a}}. \tag{4}$$

Известно также [2], что для данного класса в соответствии с (4)

$$F(x) = \log 2a + |x|/a, \quad \varphi(x) = (2/a)\,\mathrm{sign}\,x, \quad c_n = \arg\min \sum_{i=1}^{n} |x_i - c|, \tag{5}$$

т.е. c_n – выборочная медиана. Если $p(x)$ непрерывна в нуле и $p(0) > 0$, то асимптотическая дисперсия $\sqrt{n}(c_n - c^*)$ равна

$$\sigma^2(p) = 1/(4p^2(0)) \leqslant \sigma^2(p^*) = a^2.$$

Таким образом, огрубленная оценка (5) – выборочная медиана, позволяет реализовать интервальный алгоритм оценивания. При этом, в связи с робастностью оценки, интервальный оценщик биоанализатора может работать в условиях наличия выбросов сигнала x.

Полученная оценка c_n, даваемая грубленным ММП, является точкой минимума функции

$$J_n(c) = \sum_{i=1}^{n} F(x_i - c),$$

которую можно рассматривать как эмпирическую реализацию функции

$$J(c) = MF(x-c) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-c)\,p(x-c^*)\,dx$$

При замене неизвестной плотности $p(x - c^*)$ на эмпирическую плотность $n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \delta(x - x_i)$. Для минимизации $J(c)$, т.е.для решения уравнения

$$J'(c) = \int F'(x-c)\,p(x-c^*)\,dx = \int \varphi(x-c)\,p(x-c^*)\,dx = M\varphi(x-c) = 0$$

можно применять метод стохастической аппроксимации [2]

$$c_{n+1} = c_n + \gamma_n \varphi(x_{n+1} - c_n). \tag{6}$$

В этом алгоритме наблюдения x_i обрабатываются последовательно, по мере их поступления, а каждый шаг алгоритма требует минимального объема вычислений. Данный рекуррентный алгоритм позволяет добиться той же асимптотической точности оценивания, что и нерекуррентный (5). При $\gamma_n = \gamma_{opt}/(n+1)$ – является асимптотически оптимальным способом оценивания на выбранном классе распределений. Можно взять γ_n, оптимальное против наименее благоприятного распределения из выбранного класса

$$\gamma_{opt} = I^{-1}(p^*).$$

Таким образом, для класса невырожденных распределений с наименее благоприятным распределением (4), рекуррентная оценка будет следующего вида

$$c_{n+1} = c_n + \gamma_n \operatorname{sign}(x_{n+1} - c_n), \quad \gamma_n = a(n+1)^{-1}. \tag{7}$$

При использовании рекуррентного алгоритма (7) существенную роль играет выбор начального приближения c_n. Для выбора хорошего начального приближения можно применить сначала нерекуррентный алгоритм. Например, использовав алгоритм поразрядного уравновешивания или выбрав медиану первых пяти измерений.

Сравнение рекуррентного и интервального алгоритмов на информационной основе

Как было показано в предыдущем разделе, оба алгоритма позволяют получать оптимальную оценку параметра положения - выборочную медиану, которая является асимптотически эффективной, т.е. достигает нижней границы Крамера-Рао.

Предположим, что в процессе обработки выборок сигнала $x_1, \dots, x_n$ дисперсии выборочных медиан, полученных интервально и рекуррентно, стали равными между собой и меньшими точности самого оценщика

$$\mathcal{D}_P(c_n) = \mathcal{D}_u(c_n) \le \Delta.$$

Для того, чтобы сравнить алгоритмы по скорости создания фишеровской информации, т.е.чтобы воспользоваться критерием (1), вычислим необходимые объемы шенноновской информации. Тот алгоритм, который потребует меньше шенноновской информации, будет в информационном смысле лучше.

Найдем шенноновское количество информации I_i для интервального алгоритма, на один шаг обработки при получении оценки. Количество информации, согласно Шеннону, определяется как разность энтропии [3]

$$I_i = H(x_i) - H(x_i/x_n), \tag{8}$$

где $H(x_i)$ - энтропия x_i выборочного значения до измерения;

$H(x_i/x_n)$ - энтропия действительного значения x_i после выборки, т.е.энтропия погрешности самого оценщика.

Общее количество информации, необходимое для получения оценки c_n, будет в n раз больше:

$$I_Ш = I_i \cdot n. \tag{9}$$

Формула (9) действительна и при рекуррентном алгоритме.

Энтропия выборочного значения до измерения вычисляется по известной формуле

$$H(x_i) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln p(x)\, dx. \tag{10}$$

Подставляя в выражение (10) значения $p(x)$ и $\ln p(x)$ для лапласовского распределения (4), получим, что $H(x_i) = \ln 2ae$. Если оценщик обладает погрешностью с равномерным распределением, т.е.с плотностью распределения $p(x_i) = 1/2\Delta$, то энтропия результата измерения после получения показания x_n

$$H(x_i/x_n) = -\int_{x_i-\Delta}^{x_i+\Delta} \frac{1}{2\Delta} \ln \frac{1}{2\Delta}\, dx = \ln 2\Delta .$$

Итак, количество шенноновской информации для интервального оценщика при n шагах алгоритма

$$I_ш^и = n \ln \frac{ae}{\Delta} . \tag{11}$$

При рекуррентном алгоритме на каждый шаг получения оценки тратится только один бит информации, следовательно:

$$I_ш^p = \kappa \cdot n, \quad \kappa = 0{,}69. \tag{12}$$

Заметим, что дисперсия оценки параметра положения по медиане

$$\mathcal{D}(c_n) = \frac{1}{4p^2(0)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{a^2}{n} . \tag{13}$$

Поскольку x_i измеряется с погрешностью $\pm\Delta$, то

$$\mathcal{D}(c_n) \cong \frac{a^2 + \Delta^2/12}{n} . \tag{14}$$

Воспользовавшись формулами (11) и (12), можно получить, что

$$I_ш^и = I_ш^p \cdot \ln \frac{ae}{\Delta} . \tag{15}$$

Если оценщик спроектирован так, что $\Delta \ll a$, то $\mathcal{D}(c_n) \approx a^2 n$ и выигрыш в скорости создания фишеровской информации для рекуррентного алгоритма, по сравнению с интервальным, составляет $\frac{1}{\kappa} \ln (ae/\Delta) \approx 1{,}5 \ln (ae/\Delta)$.

Указанный выигрыш рекуррентного алгоритма действителен при хорошем начальном приближении c_0, т.е.когда первая оценка вычисляется из положения $\mathrm{sign}(x_0 - c_1)$ в пределах распределения сигнала x. Реально, т.е.с учетом n_a шагов адаптации (выхода на начальное приближение c_0), количество шенноновской информации

$$I_ш^p = 0{,}69n + n_a \ln \frac{ae}{\Delta} .$$

Следовательно, выигрыш, получаемый от рекуррентного алгоритма, можно определить следующей формулой

$$\gamma = I_ш^и / I_ш^p = \frac{1}{0{,}69 + \frac{n_a}{n} \ln \frac{ae}{\Delta}} \ln \frac{ae}{\Delta} . \tag{16}$$

Эффект от использования рекуррентного алгоритма приведен в таблице для различных соотношений a/Δ и n_a/n.

Таблица

Выигрыш в скорости создания фишеровской информации от применения рекуррентного алгоритма

a/Δ	1	10	100
V без адаптации	1,15	4,95	8,4
V с адаптацией n_Δ/n = 0,01	2,72	4,56	10,8
V с адаптацией n_Δ/n = 0,1	1,78	3,26	5,4

Таким образом, при оценке параметра положения сигнала, рекуррентный алгоритм эффективнее в информационном смысле интервального. Наибольший эффект от использования рекуррентной процедуры получается при большом динамическом диапазоне изменения оцениваемого параметра сигнала.

Уменьшение коэффициента загрузки канала ввода позволяет более эффективно использовать вычислитель для реализации остальных функций прибора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фельдман В.Х.//Микропроцессорные системы управления. Вып.194. Л.: ЛИАП-ЛЭТИ им.В.И.Ульянова (Ленина), 1986. С.31-34.

2. Цыпкин Я.З., Поляк Б.Т.//Динамика систем. Математические методы теории колебаний. Вып.12. Горький: изд-во университета, 1977. С.22-46.

3. Кенделл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М.: Наука, 1973. 897 с.

4. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. Л.: Энергоатомиздат. 1985. 248 с.