УДК 578.087.1:62

Модель нерегулярного кусочно-детерминированного сигнала. Курочкин В.Е., Фельдман Б.Х.//Научное приборостроение. Автоматизация научных исследований. Л.: Наука, 1988, с. 63

Введено понятие нерегулярного кусочно-детерминированного сигнала. Предложена модель сигнала, основанная на моделях кусочно-детерминированного возмущения и случайного потока событий. Модель предоставляет возможность осуществлять фильтрацию указанного сигнала совмещением процедур оценивания и проверки гипотез. Лит. - 9 назв., ил. - 3.

В.Е.Курочкин, Б.Х.Фельдман (НТО АН СССР)

МОДЕЛЬ НЕРЕГУЛЯРНОГО КУСОЧНО-ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО СИГНАЛА

В анализаторах различных субстанций сигналы первичных преобразователей, как правило, характеризуются известной детерминированной формой сигнала (типа линейного, полиномиального трендов и др.) и неизвестными случайными параметрами (амплитуда, длительность, период появления, угол наклона и др.). Такие сигналы могут быть охарактеризованы как нерегулярный (случайный) кусочно-детерминированный процесс. Оценивая случайные информационные параметры, выносят решение о состоянии исследуемой субстанции. Оптимальность оценки определяется в смысле некоторого критерия качества, который соотносит оценку состояния о состоянием исследуемого вещества. Достижение оптимальности возможно лишь при использовании в процедуре оценивания модели, адекватной наблюдаемому процессу.

Классические модели описания случайных процессов построены на основе многомерного марковского представления и могут быть интерпретированы как реакция динамической системы на многомерный белый шум. В случае дискретного представления математическая форма указанных моделей имеет вид

$$\bar{X}[n+1] = \Phi_\ell \bar{X}[n] + B_\ell \bar{\eta}[n], \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где Φ_ℓ – фундаментальная переходная матрица динамической системы, не зависящая в стационарном случае от переменной n; B_ℓ – матрица, формирующая входное воздействие; $\bar{X}[n]$ и $\bar{X}[n+1]$ – матрицы-столбцы, описывающие состояние системы в моменты n и $n+1$; $\bar{\eta}[n]$ – многомерный белый шум, составляющий вход системы.

Ранг матрицы Φ_ℓ, т.е. порядок дифференциального (разностного) уравнения, описывающего динамическую систему, определяет в среднеквадратическом смысле дифференцируемость сформированного случайного процесса. Так, в случае ℓ-порядка разностного уравнения случайный процесс (1) дифференцируем (ℓ-1) раз.

Модели описанного типа обладают рядом недостатков, связанных с нефизичностью введения фактора случайности. Это делает не вполне точными выводы (оценки), построенные на основе выбранного представления модели. Кроме этого, использование модели (1) для медленно меняющихся (гладких) функций приводит к увеличению ℓ-порядка матриц, что обусловливает невозможность расчетов в реальном масштабе времени при оценивании. Главным же недостатком здесь является наличие неопределенности каждого последующего состояния формирующей динамической системы при известном текущем состоянии, в то время как для реальных процессов, возникающих в физических системах, характерным является чередование детерминированности поведения на некоторых временных интервалах со случайной скачкообразной сменой состояния, например, в кинетическом иммуноферментном анализе при обнаружении иммуноактивных объектов в низкоинфецированных пробах (рис.1).

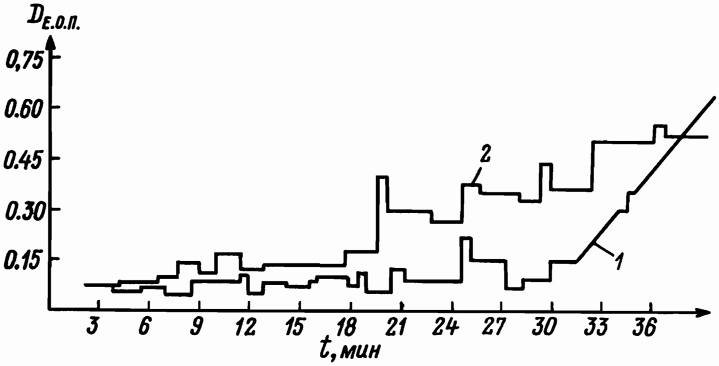

Рис.1. Зависимость светопропускания реакции фермент-субстрат во времени: 1 – при наличии в пробе иммуноактивных объектов; 2 – неспецифическое взаимодействие проба-субстрат. При вынесении решения по методу конечной точки решение ложно положительно

Ранее предпринимались попытки получения подобных случайных процессов. Так, в работе [1] они названы разрывными марковскими процессами, в работе [2] вводится понятие кусочно-детерминированного возмущения

$$\bar{X}[n+1] = \Phi\bar{X}[n] + \bar{V}[n] \qquad y[n] = C\bar{X}[n], \tag{2}$$

где $y[n]$ – скалярный выход формирующей динамической системы; $\bar{V}[n]$ – вход, равный "0", почти всюду, кроме отдельных точек, где значение $\bar{V}[n]$ – случайная многомерная величина.

Следует отметить, что процесс (2) независимо от порядка системы бесконечно дифференцируем почти всюду, за исключением точек смены состояния.

Введенные модели [2] обладают, однако, неполнотой описания моментов времени изменения состояния системы, что не позволяет решать классическую задачу оптимальной нестационарной фильтрации сигнала на фоне белого шума.

Целью данной работы является получение математической формы модели, учитывающей нерегулярность смены состояния системы, т.е.модели нерегулярного кусочно-детерминированного сигнала.

В настоящей статье введена требуемая модель, основанная на моделях кусочно-детерминированного возмущения и потока случайных событий. Полученная модель позволяет осуществить фильтрацию нерегулярного кусочно-детерминированного сигнала совмещения процедуры оценивания с процедурой проверки гипотез.

Дополним модель (2) точками $\kappa \in N(V[\kappa] \neq 0)$, образующими случайный поток событий, в частном случае стационарный и ординарный [3] . Одновременно пусть

$$V[\kappa] = \bar{\eta}, \tag{3}$$

где $\bar{\eta}$ - многомерная, нормально распределенная величина с диагональной ковариационной матрицей:

$$cov_{\eta} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \sigma_{22}^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \sigma_{nn}^2 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Совокупность (2), (3), (4), а также характеристики потока событий (интенсивность и вид плотности распределения интервалов смены состояния) составляют описание вводимого случайного процесса.

В качестве примера (рис.2) рассмотрим широко известный случайный процесс [4] , использующийся для описания таких физических событий, как действие ветра на самолет, скорость ухода гироскопа, фединг радиолокационной цели, дрейф морских течений и т.д. Сигнал $g(t)$ такого процесса сохраняет свою величину на некоторых интервалах времени, а скачки изменения составляют пуассоновский поток с интенсивностью λ , причем $T_1 = 1/\lambda$ - средний интервал времени между скачками.

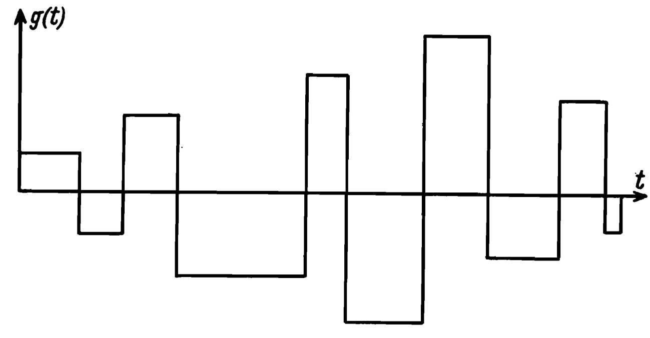

Рис.2. Нерегулярный кусочно-детерминированный сигнал

Как показано в работе [5] , спектральная плотность такого процесса описывается следующим выражением

$$S_g(\omega) = \frac{2D_0 T_1}{1 + \omega T_1^2},$$

где ω – частота спектра; $\mathcal{D}_0$ – дисперсия входного воздействия.

Описание указанного процесса приведем к виду, аналогичному (2) и (3).

$$\bar{X}[n+1] = \bar{X}[n] + \mathcal{D}_0 \bar{V}[n], \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\bar{V}[n] = \begin{cases} 0, \text{ при } & n \neq k \\ \xi_k \text{ при } & n = k, \quad k = k_1, k_2, \ldots \end{cases} \tag{5}$$

$$P(k_i - k_{i-1}) = \lambda \exp[-\lambda(k_i - k_{i-1})T_0], \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

где T_0 – интервал дискретизации; $P(k_i - k_{i-1})$ – плотность вероятностей распределения интервалов между соседними сменами состояния, ξ_k – гауссова случайная величина с единичной дисперсией.

Модель (5) позволяет сформировать и другие модели как для систем управления, так и для описания поведения сигналов, отражающих состояние исследуемых субстанций.

Применительно к введенной модели может быть поставлена классическая задача оптимальной нестационарной фильтрации сигнала на фоне белого шума.

На интервалах детерминированного поведения процесса фильтрация сводится к рекуррентной форме оценивания среднего. Возможны гауссовы методы: МИК [6], фильтрация Калмана [2]; робастные процедуры [7] и стохастической аппроксимации [8]. Перечисленные методы позволяют оценивать текущее математическое ожидание на конечном интервале.

Центральной проблемой фильтрации кусочно-детерминированных процессов является выявление моментов пульсации, т.е.обнаружение момента случайной смены состояния сигнала.

Для ее решения может быть привлечен аппарат динамической классификации случайных сигналов [9]. Рассмотрим двухальтернативную задачу проверки статистических гипотез: H_I – сохранение случайным процессом детерминированности; H_2 – смена состояния между предыдущим и текущим значениями отсчетов наблюдаемого процесса.Соответственно модели прогноза, соответствующие гипотезам, имеют вид

$$\begin{aligned} &\bar{X}_1[n+1] = \Phi \bar{X}[n] && \text{для } H_I; \\ &\bar{X}_2[n+1] = \bar{\eta}_k && \text{для } H_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Знание структуры потока смены состояний позволяет рассчитать для каждого шага априорные вероятности принятия гипотез $P(H_I)$ и $P(H_2)$, зависящие от длительности нахождения процесса в детерминированном состоянии.

Для рассматриваемого примера:

$$\begin{aligned} &H_1: \bar{X}_1[n+1] = \bar{X}[n] \\ &H_2: \bar{X}_2[n+1] = \mathcal{D}_0 \xi_k, \quad P(H_1) = \lambda \exp[-\lambda(n - k_{i-1})T_0] \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad P(H_2) = 1 - P(H_1), \end{aligned} \tag{7}$$

где k_{i-1} – отсчет предыдущего скачка смены состояния.

Таким образом, при наблюдении случайного процесса $y[n] = \bar{X}[n] + \delta[n]$ на фоне белого шума $\delta[n]$ с дисперсией σ^2 необходимо решить задачу проверки гипотезы H_I против альтернативы H_2 на основе наблюдения $y[n]$, т.е. определить принадлежность выборочного значения процесса распределениям прогнозируемых значений $\bar{X}_1[n+1]$ или $\bar{X}_2[n+1]$.

Учитывая асимптотическую нормальность таких методов оценивания, как максимального правдоподобия, байесовского, максимальной апостериорной плотности вероятностей, можно производить расчет дисперсии прогнозируемых значений по гипотезе H_I на основе фишеровского количества информации либо матричных уравнений Рикатти, используя в качестве исходной величины точность оценки состояния на предыдущем шаге.

Распределение плотности вероятностей для гипотезы H_2 соответствует нормальному, заданному ковариационной матрицей cov_l (4). Для рассматриваемого примера

$$P\{\bar{X}_1[n+1]\} = N\{\hat{X}[n];\ \sigma^2/(n-\kappa_{i-1})\},$$
$$P\{\bar{X}_2[n+1]\} = N(0,\sigma^2), \tag{8}$$

где $\hat{X}[n]$ – оценка предыдущего значения процесса.

Используя критерий максимума апостериорной плотности вероятностей, принимается гипотеза H_I, если $P(H_1/y[n]) \geq P(H_2/y[n])$, т.е.учитывая априорные значения вероятностей (7), вычисляется функциональ отношения правдоподобия $\ell(y[n]) \geq$ $\geq \mu = P(H_1)/P(H_2)$. Для распределений (8)

$$\ell(y[n]) = \left\{\sqrt{n-\kappa_{i-1}}\ \exp\left[-\frac{(y[n]-\hat{x}[n])^2}{2\sigma^2}\cdot(n-\kappa_{i-1})\right]\right\}\left(\exp-\frac{y^2[n]}{2\sigma^2}\right)^{-1}. \tag{9}$$

Комбинируя процедуру оценивания на каждом шаге с процедурой проверки гипотез, можно осуществлять фильтрацию кусочно-детерминированных случайных процессов.

Представляет интерес расчет осредненной дисперсии ошибки оптимальной фильтрации кусочно-детерминированных процессов. В отличие от классической Калмановской фильтрации в данном случае не существует перехода в стационарный режим с неизменным матричным коэффициентом усиления, аналогичный режиму фильтрации Винера (рис.3.). Величина текущей дисперсии оценки здесь представляет тоже случайный процесс, математическое ожидание которого и представляет собой осредненное среднеквадратическое отклонение, т.е. оценку точности фильтрации.

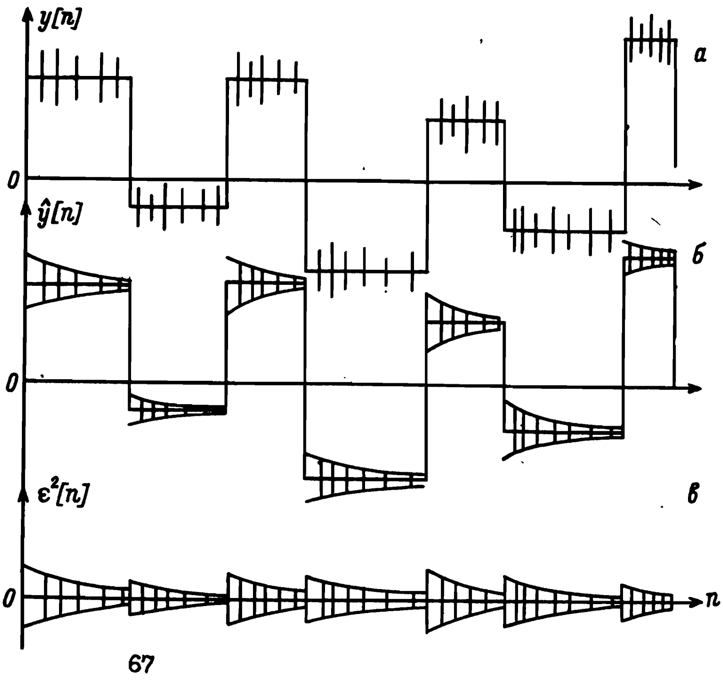

Рис.3. Фильтрация нерегулярного кусочно-детерминированного сигнала:
а – исходный сигнал,
б – зависимость дисперсии оценки среднего в результате фильтрации на детерминированных участках;
в – флуктуации среднеквадратической ошибки фильтрации

ЛИТЕРАТУРА

1. Казаков В.А. Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. М.: Советское радио, 1973. 232 с.

2. Острем К., Виттенмарк Б. Системы управления с ЭВМ. М.: Мир, 1987. 480 с.

3. Большаков И.А., Ракошиц В.С. Прикладная теория случайных потоков. М.: Советское радио, 1978. 248 с.

4. Бесекерский В.А., Небылов А.В. Робастные системы автоматического управления. М.: Наука, 1983. 240 с.

5. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1985. 768 с.

6. Эйкхофф П., Ванечек А., Савараги Е. и др. Современные методы идентификации систем. М.: Мир, 1983. 400с.

7. Цыпкин Я.З., Поляк Б.Т.//Динамика систем. Математические методы теории колебаний. Вып.12. Горький: изд-во университета, 1977. С:22-46.

8. Невельсон М.В., Хасьминский Р.З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1972. 304 с.

9. Бесекерский В.А., Изранцев В.В. Системы автоматического управления с микроЭВМ. М.: Наука, 1987. 320 с.